

181-744

690X 559EIC

Universidad Técnica Particular de Loja
BIBLIOTECA GENERAL



Recibido el 2001-01-10

Valor \$ 1.00

Nº Clasificación 2001 V327 JC.386

690

Cubiertas

Acero

Soldadura

Diseño estructural:

690.15

690



UNIVERSIDAD TECNICA PARTICULAR DE LOJA

FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL

**ANALISIS DE CUBIERTAS LAMINARES CILINDRICAS
FORMADAS POR UNA MALLA TRIANGULAR
DE PERFILES METALICOS**

*Tesis de Grado previa a la obtención del
Título de INGENIERO CIVIL.*

AUTOR:

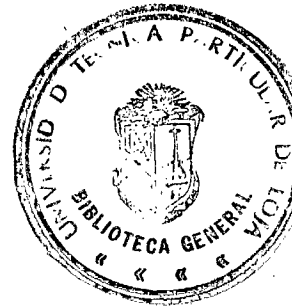
Yul Michael Vásquez Ordóñez

DIRECTOR:

Ing. Humberto Ramírez

LOJA - ECUADOR

2000



Loja, Octubre 16 del 2000.

Señores:

**MIEMBROS DEL H. CONSEJO DE FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DE LA UNIVERSIDAD TÉCNICA PARTICULAR DE LOJA**
Ciudad.

Ing. Humberto Ramírez Romero, Director de Tesis del señor egresado Yul Michael Vásquez Ordóñez, sobre el tema: ANÁLISIS DE CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS FORMADAS POR UNA MALLA TRIANGULAR DE PERFILES METÁLICOS.

CERTIFICO:

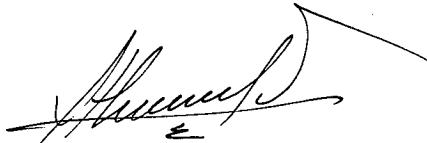
Que revisados prolijamente los borradores y luego de cumplidas las sugerencias y observaciones autorizo su presentación ante el H. Consejo de Facultad.

Atentamente,

Ing. Humberto Ramírez Romero.

AUTORÍA

La investigación, análisis, resultados y conclusiones del presente trabajo son propiedad exclusiva del autor.



Egdo. Yul Michael Vásquez Ordóñez



DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico:

A mis padres, Fanny y Miguel Angel quienes con esfuerzo y sacrificio me han sabido guiar y apoyar en cada momento de mi vida.

A mi esposa Doris del Pilar, por su apoyo incondicional y generoso, a mi familia, amigos y compañeros que aportaron positivamente a lo largo de mi carrera universitaria.

Yul Michael

AGRADECIMIENTO

Expreso mi agradecimiento a todos los catedráticos que supieron impartirme sus valiosos conocimientos; a la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Particular de Loja.

De manera muy especial al Sr. Ing. Humberto Ramírez, Director de Tesis, quien con sus amplios conocimientos me brindó una valiosa y acertada orientación en la realización y culminación del presente trabajo.

El autor.

CONTENIDO

CERTIFICACIÓN

AUTORÍA

DEDICATORIA

AGRADECIMIENTO

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1.

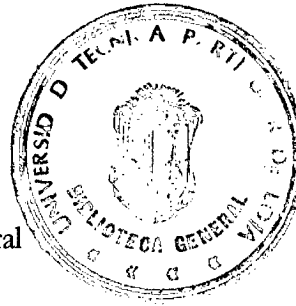
GENERALIDADES SOBRE DISEÑO ESTRUCTURAL

- 1.1. Estructuras en Ingeniería
- 1.2. Procedimiento de diseño
- 1.3. Cargas permanentes
- 1.4. Cargas vivas
- 1.5. Cargas de viento
- 1.6. Cargas de sismo
- 1.7. Seguridad de las estructuras
- 1.8. Consideraciones probabilísticas de la seguridad
- 1.9. Factor de seguridad y factor de carga.
- 1.10. Códigos y especificaciones

Capítulo 2.

MATERIALES

- 2.1 Ventajas y desventajas del acero como material estructural
- 2.2 Propiedades mecánicas de los aceros estructurales
- 2.3 Propiedades mínimas de tensión de los aceros estructurales
- 2.4 Perfiles metálicos laminados en frío.
 - 2.4.1. Introducción
 - 2.4.2. Perfiles de lámina delgada en el mercado nacional
 - 2.4.3. Consideraciones de diseño
 - 2.4.4. Esfuerzo admisible básico



Capítulo 3.

MIEMBROS A TENSIÓN

- 3.1 Tipos de miembros a tensión
- 3.2 Esfuerzos permisibles
- 3.3 Miembros a tensión con conexiones soldadas
- 3.4 Esfuerzos residuales y perforaciones de los perfiles
- 3.5 Esbeltez máxima

Capítulo 4.

MIEMBROS A COMPRESIÓN

- 4.1 Introducción
- 4.2 Esfuerzos permisibles



- 4.3 Miembros a compresión
- 4.4 Carga crítica de Euler
- 4.5 Pandeo elástico
- 4.6 Pandeo inelástico
- 4.7 Pandeo torsional
- 4.8 Pandeo local
- 4.9 Pandeo general de flexión
- 4.10 Falla por aplastamiento
- 4.11 Longitud efectiva
- 4.12 Esbeltez máxima
- 4.13 Miembros tubulares cilíndricos en compresión

Capítulo 5.

CONEXIONES SOLDADAS

- 5.1. Introducción
- 5.2. Soldadura
- 5.3. Tipos de soldadura
- 5.4. Electrodo
- 5.5. Símbolos de soldadura
- 5.6. Bases de diseño
- 5.7. Soldadura a tope
 - 5.7.1 Área efectiva
 - 5.7.2 Esfuerzos admisibles

- 5.7.3 Resistencia nominal
- 5.7.4 Limitaciones de diseño
- 5.8. Soldadura de filete
 - 5.8.1 Área efectiva
 - 5.8.2 Esfuerzos admisibles
 - 5.8.3 Resistencia nominal
 - 5.8.4 Carga admisible por unidad de longitud
 - 5.8.5 Limitaciones de diseño
- 5.9. Capacidad admisible de conexiones soldadas

Capítulo 6.

TEORÍA DE LA LÁMINA CILÍNDRICA RETICULADA DE DIRECTRIZ CIRCULAR

- 6.1. Generalidades
- 6.2. Teoría de la lámina cilíndrica reticulada de directriz circular
- 6.3. Sistema homogéneo
 - 6.3.1. Determinación de ecuaciones
- 6.4. Desarrollo numérico
 - 6.4.1. Estado membrana
 - 6.4.2. Carga uniformemente repartida en planta.

Capítulo 7.

PLANIFICACIÓN Y ESTRUCTURACIÓN DEL PROGRAMA

- 7.1. Revisión de datos de diseño

- 7.2. Planificación de algoritmos
- 7.3. Estructuración de algoritmos
- 7.4. Diagrama de flujo
- 7.5. Salida de resultados
- 7.6. Limitaciones del programa
- 7.7. Ejercicio de aplicación y comparación con los resultados del programa.
- 7.8. Manual del usuario
 - 7.8.1 Descripción y manejo del paquete computacional
 - 7.8.2 Unidades de trabajo
 - 7.8.3 Descripción de cada una de las opciones a elegir
 - 7.8.4 Impresión de resultados

Capítulo 8.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

BIBLIOGRAFÍA.

INTRODUCCIÓN

El hierro ha sido siempre la mejor solución para el cubrimiento de grandes y espaciosas naves, claras y resistentes a los efectos del fuego siempre y cuando tenga la adecuada protección.

El progreso en esta moderna técnica de estructuras metálicas ha creado obras de excepcional valor, de las cuales, muchas de ellas, solamente se conocen por fotografías o bien de relatos.

La idea de conseguir una estructura metálica cuya resistencia se confíe al efecto lámina nace de la consideración conjunta de las ventajas estructurales, económicas y estéticas de las láminas continuas de hormigón, por un lado, y de la ligereza de las estructuras metálicas ordinarias, por otro.

Las cubiertas laminas de hormigón permiten, en general, una notable economía de materiales; economía que, a menudo, queda en gran parte contrarrestada por el elevado costo relativo del encofrado, de único empleo en la mayoría de los casos.

Por otra parte, en este tipo de estructuras, y especialmente en las cubiertas de grandes luces, el peso propio constituye un sumando de la mayor importancia dentro de las cargas totales que debe resistir la estructura, y conviene, por tanto, reducirlo al mínimo posible. Entre las cubiertas continuas de hormigón, las láminas presentan la solución de mínimo



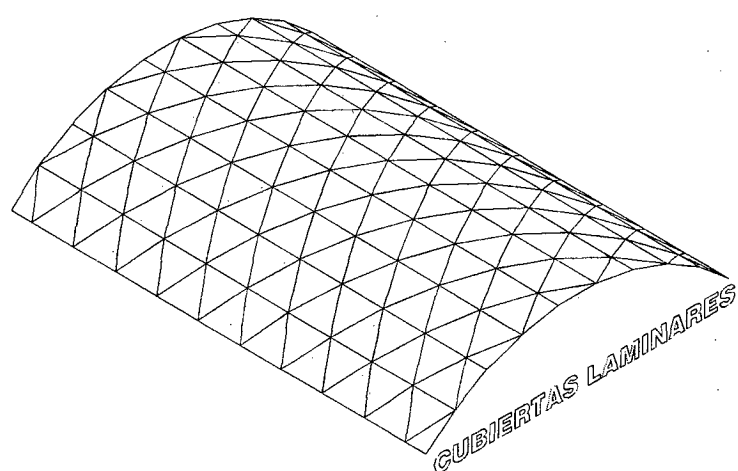
peso; éste es, no obstante, mucho mayor que el de una estructura metálica con cubierta de fibrocemento o similar y protegida interiormente, si fuese necesario, por un revestimiento de materiales aislantes, pero, las estructuras metálicas ordinarias, cerchas, pórticos, etc., necesitan con frecuencia de elementos resistentes dispuestos en el interior de la nave, que muchas veces estorban y que casi siempre son rechazables desde el punto de vista estético.

Estas consideraciones **sugieren la idea de aplicar a las estructuras metálicas los métodos de cálculo de las láminas continuas, pero reemplazando la lámina por una retícula triangular inscrita en la superficie teórica de aquella.**

La retícula triangular, equilátera o no, es muy fácilmente adaptable a las superficies desarrollables, entre ellas las cilíndricas. Se han construido cubiertas cilíndricas de este tipo, con perfiles laminados ordinarios, pero siempre en ellas, hasta ahora, se ha fiado su resistencia al efecto bóveda y no al efecto lámina.

Debido al gran desarrollo de la utilización de los perfiles metálicos en la construcción de cubiertas y al avance constante de nuevas técnicas, métodos y procedimientos para el análisis de este tipo de estructuras, y a la necesidad de crear cubiertas capaces de responder a las expectativas de confortabilidad y espaciamiento dentro de las mismas, **se ha creído conveniente a través del presente proyecto, realizar una investigación encaminada a la introducción de nuevos métodos de análisis y recalcar las bondades que nos ofrecen este tipo de estructuras.**





CAPITULO I



1. GENERALIDADES SOBRE DISEÑO ESTRUCTURAL.

1.1 ESTRUCTURAS EN INGENIERÍA.

Las estructuras en la ingeniería son tan variadas que desafían cualquier intento de enumerarlas, excepto en una forma muy general. Los innumerables problemas que se presentan en su diseño han provocado que los ingenieros se especialicen en el diseño de estructuras particulares, siendo aconsejable que el diseño se lo relacione con las demás ramas afines de la ingeniería, sin descuidar el propósito fundamental del diseñador de estructuras el de lograr una estructura económica y segura, que cumpla con ciertos parámetros funcionales y estéticos.

El ingeniero debe tener un conocimiento claro de las propiedades de los materiales, del comportamiento estructural y análisis estructural.

El óptimo diseño de las estructuras dependerá exclusivamente de la habilidad creativa, imaginación y experiencia del diseñador.

1.2 PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO.

La teoría de las estructuras y la evidencia experimental son herramientas necesarias para el diseño estructural, mas no son suficientes para establecer procedimientos de diseño completamente científicos, ya que para hacer un análisis

teórico, se necesita idealizar el comportamiento estructural por medios de suposiciones ingenieriles bien sustentadas, de tal manera que las fuerzas internas y los desplazamientos calculados representen aproximaciones de los que realmente se presentan en las estructuras. De igual manera, la resistencia de las estructuras reales a las cargas y a las deformaciones pueden determinarse sólo aproximadamente.

Debemos tomar en cuenta que las estructuras, están sujetas frecuentemente a fuerzas y condiciones de servicio que no pueden ser previstas con precisión. La experiencia y el buen criterio juegan un papel preponderante en la realización del diseño estructural, aunque generalmente solos no son suficientes, sino que deben apoyarse y guiarse por el análisis científico, basado en la comprensión completa de la teoría de las estructuras, de la mecánica estructural y de un factor apropiado de seguridad.

1.3 CARGAS PERMANENTES.

Partiendo de la estructuración general, puede realizarse ya una estimación de las cargas aplicadas, tal es el caso de las cargas por PESO PROPIO que comúnmente se las denomina “Carga Muerta o Permanentes”, y se las puede determinar con un alto grado de precisión, aunque no sea sino hasta que la estructura ha sido diseñada.

Es necesario estimar la carga muerta de una estructura antes de su análisis, a fin de que se tome en cuenta la proporción de las cargas internas que corresponden al peso propio. Las estimaciones deben realizarse adecuadamente, ya que una vez determinado el peso real de la estructura, deberá compararse con el peso estimado y en caso de una diferencia significativa hacerse las correcciones necesarias.

La carga principal por considerar en cubiertas laminares, será la del peso propio en los perfiles metálicos, además la de la superestructura de la cubierta estipuladas en las tablas disponibles en los catálogos de los fabricantes.

1.4 CARGAS VIVAS.

Todas las cargas diferentes de la carga muerta se llaman cargas vivas. La carga viva puede ser estable o inestable, las cargas vivas en movimiento pueden producir fuerzas que son considerablemente mayores que las que resultarían si las mismas cargas se aplicaran sin movimiento.

La carga viva es la carga súper impuesta por el uso y ocupación de la estructura, sin incluir la carga debida al viento, la carga por movimientos sísmicos o la carga muerta.

En cubiertas laminares la sobrecarga se tomará debido al peso de personas que proporcionará a la estructura, en el momento de instalación y mantenimiento de la cubierta.



1.5 CARGAS DE VIENTO.

La determinación de los efectos del viento sobre un objeto en su trayectoria es un problema complejo de aerodinámica. Si consideramos al aire como no viscoso e incomprensible, lo cual es razonable para la magnitud de las velocidades con que se diseñan las estructuras en la ingeniería civil.

Son cargas de carácter dinámico, aplicadas aleatoriamente cuya presión aplicada sobre una superficie depende de la velocidad del viento, de la pendiente de la superficie, de la forma de la superficie, de la protección proporcionada por otra estructura, de la densidad del aire, de la orientación del edificio, del área de la superficie en contacto.

Las presiones de velocidad debidas al viento que debe usarse en el diseño de cubiertas, es la velocidad básica del viento registrada cerca del sitio de construcción.

Velocidad básica del viento.- Es la velocidad del viento que recorre más rápidamente una milla (1609 m), registrada a una altura de 32.8 pies (10m) por encima del nivel de terreno abierto y llano con un período de recurrencia de 50 años.

1.6 CARGAS DE SISMO.

Los sismos pueden ocurrir en cualquier parte del mundo, por lo que debemos

estar preparados a ocurrencias esperadas de futuros eventos sísmicos adversos expresados en términos de la probabilidad de excedencia, de parámetros que caracterizan los movimientos del terreno, el problema queda definido de una manera probabilística y esto es debido a la incertidumbre de algunos parámetros que intervienen en el cálculo de la estructura.

“ La respuesta de una estructura a un sismo, depende principalmente de su localización en la región afectada, su orientación con relación a la dirección de los movimientos más violentos del terreno, sus períodos naturales de vibración, sus características de amortiguamiento, las propiedades físicas del material estructural y la naturaleza del suelo en que se apoya la cimentación. ”¹

1.7 SEGURIDAD DE LAS ESTRUCTURAS.

La seguridad de las estructuras está basada en condicionantes respecto del tipo de estructuras, resistencia de los materiales, de los detalles de construcción, durabilidad. Podríamos decir que el ingeniero está a expensas de la reserva de resistencia de cualquier miembro estructural la cual la expresamos en términos del factor de seguridad.

¹ GAYLORD, Edwin y Charles, DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO, CÁP. 1 Pág. 44. Edit. Continental, S.A. 1980.

“ El factor de seguridad puede determinarse con respecto a resistencia, fluencia inicial, deformación aceptable, etc.

La magnitud del factor de seguridad deberá basarse en las siguientes consideraciones:

1. Variabilidad del material respecto a su resistencia y otras propiedades físicas pertinentes.
2. Incertidumbre con relación a las cargas consideradas, en cuanto a cambios en el futuro, así como el valor presente de su magnitud.
3. Precisión con que se determinarán las fuerzas internas en los diferentes componentes de la estructura.
4. Posibilidad de deterioro debido a la corrosión y otras causas.
5. Extensión de los daños y pérdidas de vida que provocaría una falla.
6. Control de calidad de la mano de la obra.”²

“El término falla estructural no siempre significa colapso total. Las deformaciones excesivas de la estructura impiden a menudo su funcionamiento adecuado y constituyen una falla tan seria como el colapso”.³

El colapso de la estructura se da cuando ocurren fallas de miembros principales o conexiones por cortante, arrancamiento (tensión), pandeo o aplastamiento, el

² GAYLORD, Edwin y Charles, DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO, CÁP. 1 Pág. 47. Edit. Continental, S.A. 1980.

³ BRESLER, LIN y SCALZI, DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO, CÁP. 1. Pág. 41. Edit. LIMUSA-WILEY, S.A. 1970.

colapso total puede ocurrir bajo cargas severas de impacto o explosión, o por resultado de **fatiga** después de un gran número de intervenciones de esfuerzos o del pandeo de los miembros principales.

Las deformaciones excesivas aparecen bajo condiciones de sobrecarga elevadas presentes durante largo tiempo o bajo impactos moderados, y proviene de la fluencia exagerada del material en tensión o compresión. Algunas deformaciones pueden ser, en ocasiones, lo suficientemente graves como para clasificarlas como **fallas estructurales**, aunque la resistencia última de la estructura no se ve disminuida en forma considerable por estas deformaciones.

1.8 CONSIDERACIONES PROBABILÍSTICAS DE LA SEGURIDAD.

El **factor de seguridad** se define como la relación de la resistencia a la fuerza inducida.

$$\text{Factor de seguridad} = \frac{S}{R}$$

De donde:

S= Resistencia calculada de la estructura.

R= Carga interna calculada.

La incertidumbre del comportamiento del acero y de las cargas vivas para las que se diseñan las estructuras es también incierta, por tal razón la confiabilidad de una estructura es difícil de determinar, y además la probabilidad de falla no es necesariamente la misma para todas las partes de una estructura, causan desviaciones de los valores probables respecto a los valores calculados, de tal forma que el valor más bajo probable de la resistencia es $S = S - \Delta S$ y el valor más alto probable de la carga es $R = R + \Delta R$.

ΔS Y ΔR son valores de desviaciones máximas probables entre los valores reales y los valores calculados.

Con objeto de evitar una falla bajo las condiciones más adversas, S debe ser cuando menos igual, o ligeramente mayor, que R . Entonces

$$S - \Delta S \geq R + \Delta R \quad \text{ó} \quad S \left[1 - \frac{\Delta S}{S} \right] \geq R \left[1 + \frac{\Delta R}{R} \right]$$

El factor de seguridad mínimo n será entonces

$$n = \frac{S}{R} = \frac{1 + \frac{\Delta R}{R}}{1 - \frac{\Delta S}{S}}$$

Para realizar una evaluación cuantitativa de las desviaciones tomaremos énfasis en los diferentes mecanismos de falla, de los cuales los más importantes son: flujo plástico gradual hasta llegar al colapso, pandeo general o local y fractura frágil; más aún, la resistencia última, ya que depende en gran parte de la rigidez de las conexiones en los extremos y de los efectos de los elementos rigidizantes y los materiales protectores contra el fuego, o cualquier otro tipo de recubrimiento.

“La determinación de la resistencia S se complica más aún por las variaciones en las propiedades mecánicas del material, ya que aunque se cuenta con un alto control de calidad, existe sin embargo un rango de variación en el esfuerzo de cedencia del acero estructural. La resistencia última y el tipo de falla son afectados considerablemente por el estado de esfuerzos y la temperatura ambiente; en estructuras soldadas, la presencia de concentraciones de esfuerzos y de esfuerzos residuales en combinación con bajas temperaturas, puede causar una fractura en lugares donde no sería de esperarse bajo condiciones normales. También contribuyen a las incertidumbres en el valor calculado de la resistencia S las tolerancias de manufactura, la mano de obra defectuosa y la corrosión”.⁴

“Los efectos combinados de las múltiples incertidumbres existentes en los valores calculados de la carga interna R y de la resistencia última S no son directamente acumulativos por necesidad. Algunas de estas incertidumbres están sujetas a las leyes de las probabilidades y se ha propuesto determinar

⁴ BRESLER, LIN y SCALZI. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. CAP. 1. Pág. 43. Edit. LIMUSA-WILEY, S.A. 1970.

estadísticamente ΔR y ΔS . Teóricamente debería determinarse un valor particular para cada estructura, el cual conduciría a un valor particular del factor de seguridad n a usarse en el diseño. La falta de información estadística y de análisis de los diferentes factores que influyen sobre ΔR y ΔS evita actualmente el uso de este método. Por lo tanto, el rango de variaciones de S y R debe determinarse en gran parte sobre la base del juicio propio, guiado por algunos análisis, resultados de pruebas y experiencias pasadas. En muchos casos los valores de ΔR y ΔS se determinarán subjetivamente en vez de objetivamente, pero a pesar de esta limitación puede ser preferible usar el valor del factor de seguridad mínimo n obtenido al considerar todas la incertidumbres de una manera cualitativa y asignando valores razonables, aunque subjetivos, a ΔS y ΔR , que emplear siempre un esfuerzo permisible constante, el que no puede ser aplicable a todos los casos con una economía uniforme. Esto es especialmente cierto si el esfuerzo permisible fue especificado empíricamente o si se usan métodos empíricos para el cálculo de esfuerzos”.⁵

1.9. FACTOR DE SEGURIDAD Y FACTOR DE CARGA.

El concepto de factor de seguridad puede aplicarse en cualquiera de dos sentidos:

⁵ BRESLER, LIN y SCALZI. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. CÁP. 1. Pág. 43. Edit. LIMUSA-A. P. R. T. UL R DE LOI WILEY, S.A. 1970.



- La resistencia esperada del miembro estructural, u otro elemento, se cataloga como un esfuerzo de tensión o esfuerzo de compresión, dividido por un factor de seguridad para obtener un esfuerzo permisible, de esto se deduce que el miembro será escogido de tal forma que el esfuerzo inducido por la carga esperada de servicio sea igual o menor que el valor permisible, a este procedimiento se lo denomina “Diseño por Esfuerzo Permisibles o también como Diseño Elástico.(Método basado en la Ley de Hooke).

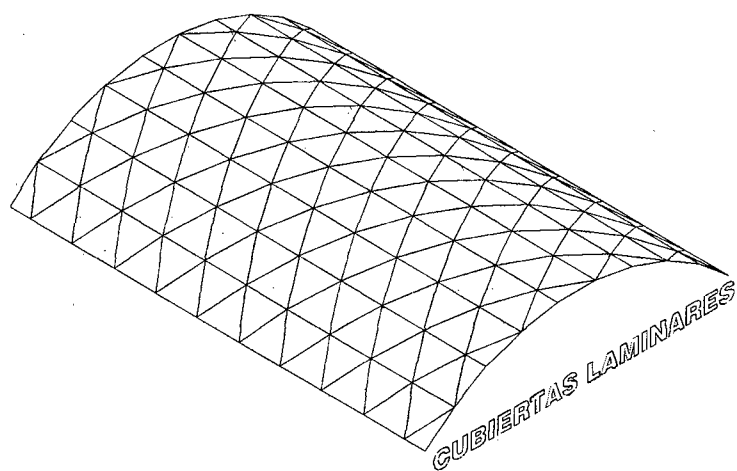
- El miembro estructural se escoge de manera que la resistencia esperada sea igual o mayor que la carga de servicio especificada, multiplicado por un factor de seguridad, con este procedimiento se nos hacen factibles y confiables las diferentes predicciones de cargas. Por ejemplo: la carga muerta es posible determinar con una buena precisión, puede utilizarse el factor de seguridad en este caso menor al de la carga viva. Así, los factores multiplicadores en las diferentes cargas no son iguales, lo que constituye la diferencia en el concepto de factor de seguridad, por lo que lo denominamos **factor de carga**.

1.10. CÓDIGOS Y ESPECIFICACIONES.

Las especificaciones normales de diseño y los códigos de construcción se ha desarrollado como un medio para brindar al ingeniero, un compendio colectivo de los conocimientos, criterios y experiencias de su profesión



Se trata de encauzar la información necesaria relacionada con las cargas de servicio y la resistencia de los miembros, además se intenta cubrir de una manera general las cuestiones de forma y tamaño de una estructura y sus miembros, sus conexiones, los métodos aceptables de análisis, fabricación, montaje y construcción, tratando de buscar la seguridad de las personas, siendo los códigos los que proporcionen a las oficinas públicas, consultores de la construcción con un documento normativo y obligatorio.



CAPITULO II

2. MATERIALES.

2.1. VENTAJAS Y DESVENTAJAS DEL ACERO COMO MATERIAL ESTRUCTURAL.

Las principales ventajas del acero son:

- **Alta resistencia por unidad de peso:** el peso propio de la estructura de acero es más liviano que el de otros materiales.
- **Linealidad y elasticidad:** el acero es uno de los materiales que mejor se desempeña, al de un material elasto-plástico ideal, por esto sus propiedades necesarias para el diseño se pueden conocer con mayor precisión que las de otros materiales.
- **Ductilidad:** el acero estructural es un material con gran capacidad de deformación inelástica, sin presentar fallas prematuras de tipo frágil (sin ruptura), y se mide usualmente por el alargamiento.
- **Facilidades Constructivas:** nos permite prefabricación de los miembros, rapidez en el montaje, facilidad de realizar las conexiones, uniformidad en sus propiedades, posibilidad de fácil ampliación y modificación de la estructura.
- **Facilidades de desmontaje, reutilización** y buen precio como material sobrante (chatarra).

Las principales desventajas del acero son:

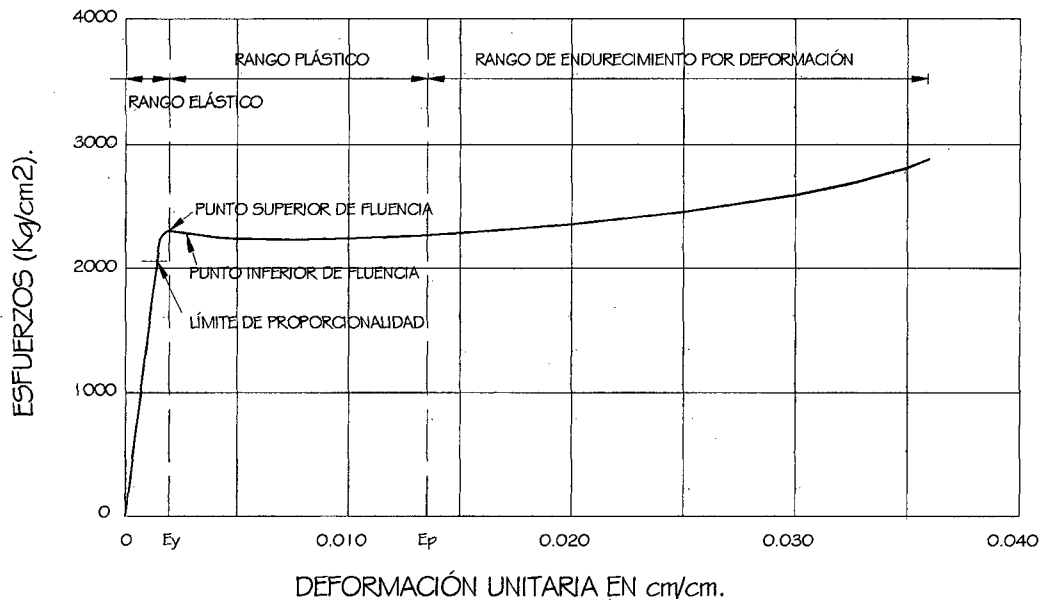
- **Alto costo de mantenimiento:** los miembros deben pintarse para alcanzar protección contra la corrosión.
- **Necesidad de protección contra el fuego:** los miembros deben aislarse para reducir su alta conductividad del calor y proveer a la edificación (cuando se requiera) de un sistema de rociadores contra incendio.
- **Propensión a la inestabilidad:** por su alta capacidad de carga, los miembros son generalmente esbeltos, por lo que debe asegurarse la estabilidad lateral de cada uno, y del conjunto.
- **Poca rigidez:** por la misma razón anterior, un momento de inercia de la sección demasiado pequeño, puede conducir a que, bajo cargas de servicio, se produzcan deflexiones, deformaciones o vibraciones indeseables, aunque su resistencia sea adecuada.

2.2. PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS ACEROS ESTRUCTURALES.

Entre las propiedades mecánicas que se pueden determinar mediante el ensayo de tensión de una probeta estándar, las más importantes en el diseño de estructuras de acero son:

“Un diagrama típico esfuerzo-deformación de un acero estructural al carbono se caracteriza por la existencia de una zona inicial en la que esfuerzos y

deformaciones están relacionados entre sí linealmente, seguida por la llamada región plástica, donde tienen lugar deformaciones considerables sin incremento apreciable de esfuerzos, y termina en una región de endurecimiento por deformación, en la cual un incremento de deformación es nuevamente acompañado por un incremento de esfuerzo. La deformación unitaria plástica E_p que precede al endurecimiento por deformación es de diez a veinte veces mayor que la deformación unitaria correspondiente a la iniciación del flujo plástico, E_y , y por lo tanto, un miembro que desarrolle esta deformación plástica sufrirá grandes deformaciones. La fluencia inicial no es necesariamente una indicación de falla; por el contrario, la capacidad de fluir localmente es una característica valiosa de los elementos estructurales de acero.



CURVA PARCIAL ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA ACERO A-36.

Figura. 1

Cuando el flujo plástico se extiende sobre una porción grande del miembro, esto es, cuando ya no puede considerarse local, la deformación se incrementa rápidamente y ocurre la falla en forma de una deformación excesiva, o bien, de un colapso total de la estructura”.⁶

- **Punto de fluencia:** se define como el esfuerzo en el que el material deja de comportarse elásticamente llegando a una deformación permanente.
- **Resistencia a la tensión:** se define como el cociente de la carga axial máxima aplicada sobre la muestra, dividida entre el área de la sección transversal original.
- **Límite de proporcionalidad:** es el esfuerzo máximo para el cual los esfuerzos son directamente proporcionales a las deformaciones.
- **Módulo de elasticidad:** es la relación del esfuerzo a la deformación en la región elástica de la curva esfuerzo – deformación. Se determina este valor por medio de la pendiente de dicha porción elástica del diagrama ($E=29000\text{Ksi}=2043000\text{ Kg/cm}^2$).
- **Relación de Poisson:** se denomina relación de Poisson μ a la relación entre la deformación unitaria transversal y la deformación unitaria longitudinal, bajo una carga axial dada. Este valor varía, para el acero, de 0.25 a 0.33, dentro del rango elástico.

⁶ BRESLER, LIN y SCALZI. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. CÁP. 2. Pág. 54. Edit.LIMUSA-WILEY, S.A.1970.

- **Módulo de elasticidad al esfuerzo cortante:** la relación del esfuerzo cortante a la deformación unitaria por cortante, dentro del rango elástico, se denomina módulo de elasticidad al esfuerzo cortante **G** y puede determinarse mediante la expresión:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Para aceros estructurales G es aproximadamente 925000 Kg/cm².

- **Módulo de tenacidad:** es la capacidad del material para absorber energía en la zona plástica.
- **Resistencia a la fatiga:** se llama resistencia a la fatiga al esfuerzo al cual el acero falla bajo aplicaciones repetidas de carga.
- **Resistencia a la rotura:** representa el máximo valor del esfuerzo que el material puede soportar en tracción sin fracturarse.

2.3. PROPIEDADES MÍNIMAS DE TENSION DE LOS ACEROS ESTRUCTURALES.

El acero más utilizado es el **acero estructural** ASTM A-36, cuyas propiedades mínimas de tensión son:

- Esfuerzo de fluencia mínimo: $F_y = 36 \text{ Ksi} = 2540 \text{ Kg/cm}^2$.
- Resistencia mínima: $F_u = 58 \text{ Ksi} = 4100 \text{ Kg/cm}^2$.
- Alargamiento en la rotura: $\delta_u = 20\%$.

2.4. PERFILES METÁLICOS LAMINADOS EN FRÍO.

2.4.1 INTRODUCCIÓN.

La utilización de estructuras de acero de lámina delgada doblada en frío, se ha aumentado en los últimos años. En nuestro país, la lámina delgada tiene un extenso uso en estructuras sometidas a cargas ligeras con luces medianas y grandes, como pórticos y para el cubrimiento de espacio de grandes dimensiones.

Entre las ventajas más importantes del empleo del perfil nacional están: la economía, el poco peso, la rapidez de construcción y la posibilidad de prefabricación, pero presenta algunos inconvenientes como la pérdida de resistencia por la acción de grandes temperaturas, así como también la acción del óxido que se evita pintando periódicamente la armadura con el objeto de que la estructura perdure.

La diversidad de perfiles disponibles ha permitido una gran versatilidad en el diseño de estructuras. Las normas para el diseño de estructuras de acero en este tipo de perfiles, están regida por la A.I.S.I (AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE).

2.4.2 PERFILES DE LÁMINA DELGADA EN EL MERCADO NACIONAL

Los perfiles más utilizados y disponibles en nuestro país son:

Canales U, Correos G, Correos Z, Perfiles Ω , Ángulos L, Tubos circulares, tubos cuadrados y rectangulares.

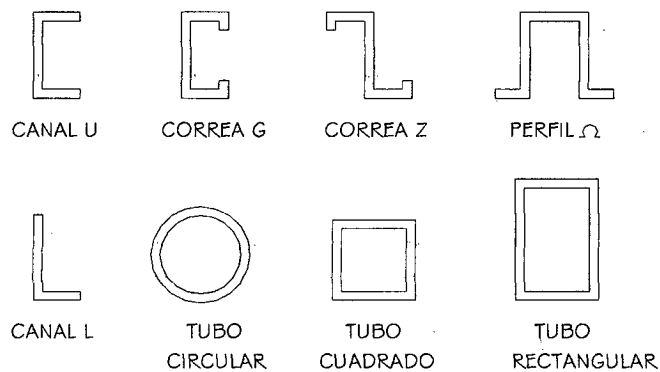


Figura.2

Los espesores de lámina disponibles en el mercado varían desde 2 mm hasta 10 mm, aunque las especificaciones admiten espesores de hasta 25 mm, es posible laminar perfiles con geometrías diferentes a los comerciales en talleres provistos de dobladoras y cortadoras de planchas metálicas.

2.4.3 CONSIDERACIONES DE DISEÑO.

En el diseño de estructuras con perfiles de lámina delgada, debemos tomar en cuenta ciertos factores especiales.

A diferencia de los perfiles laminados en caliente, los elementos de lámina delgada pandean localmente bajo cargas de compresión de poca intensidad, por lo que en su diseño se toma en cuenta la resistencia de post-pandeo de las láminas, en el diseño de miembros a compresión se incorpora el factor de forma Q , que trabaja reduciendo la sección transversal y la resistencia, al tomar en consideración el pandeo local o abolladura de los elementos.

A causa del comportamiento inelástico del material durante el pandeo local, las deformaciones reales en la estructura son mayores que las deformaciones que predice el análisis elástico.

El comportamiento de los perfiles de lámina delgada es poco adecuado ante la presencia de cargas torsionales debido a que constituyen generalmente secciones abiertas, pero cuando un elemento de lámina delgada está sometido a esfuerzos de tracción, puede desarrollar su capacidad completa.

2.4.4 ESFUERZO ADMISIBLE BÁSICO.

El esfuerzo sobre la sección neta de miembros traccionados o comprimidos, y la tracción y compresión en las fibras extremas de miembros sometidos a flexión no debe exceder del siguiente valor cuando la falla del miembro se produce por fluencia del acero.

$$F=0.60*F_y$$

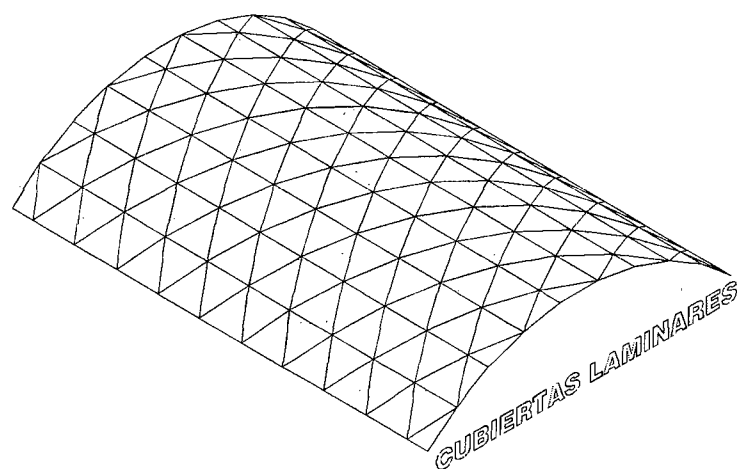
Donde :

F_y : Esfuerzo de fluencia del acero (Kg/cm^2)

Perfil nacional = $2400 \text{ Kg}/\text{cm}^2$

F : Esfuerzo admisible básico ($1440 \text{ Kg}/\text{cm}^2$ para $F_y=2400 \text{ Kg}/\text{cm}^2$).

En caso de que las solicitaciones de miembro incluyan, a más de las cargas gravitacionales, el efecto del viento, el sismo o cualquier carga eventual, los esfuerzos permisibles pueden ser incrementados en un 33.33% o, en su defecto, se puede reducir en un 25% la magnitud de las solicitaciones.

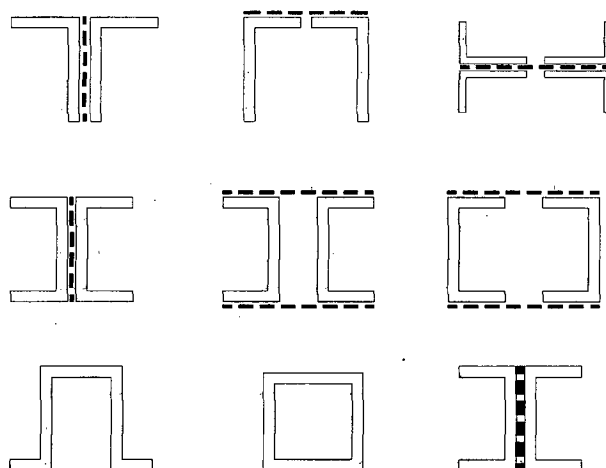


CAPITULO III

3. MIEMBROS A Tensión.

3.1 TIPOS DE MIEMBROS A Tensión.

La forma de un miembro tensionado depende del tipo de estructura de la cual forma parte y de la clase de conexiones utilizadas para unir sus extremos a las otras partes de la estructura. Los miembros a tensión más simples son los cables, barras redondas y cuadradas y placas rectangulares. Los cables se usan para suspender elementos o tensar extremos de otros miembros. Se usan también perfiles simples, como ángulos, placas, perfiles W, S y T, también pueden formarse secciones compuestas con perfiles simples, cuyas formas se muestran a continuación:



3.2 ESFUERZOS PERMISIBLES.

Los miembros sujetos a tensión se diseñan bajo el criterio de que los esfuerzos son uniformemente distribuidos en la sección transversal.

El diseño debe considerar los tres estados límite siguientes:

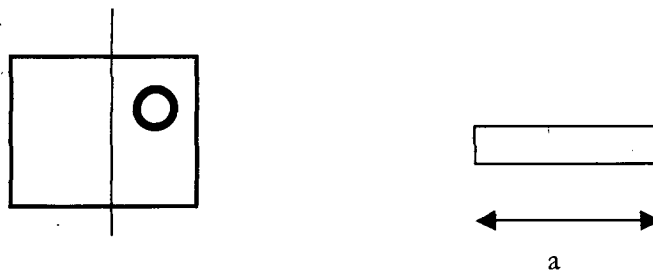
- ❑ La falla por falta de **resistencia en la sección bruta.**
- ❑ La falla por **fractura en la sección neta efectiva.**
- ❑ El **alargamiento** excesivo bajo cargas de servicio.

De acuerdo con las especificaciones AISC:

$F_t = 0.6F_y = 60\%$ Esfuerzo mínimo de fluencia.

$F_t = 0.5F_u = 50\%$ Resistencia mínima a la tensión.

Cuando existen perforaciones, el área neta efectiva de un miembro sujeto a tensión:



Área Bruta = ancho x espesor.

Área Agujero = ϕ agujero x espesor.

ϕ agujero = ϕ tornillo + 1/8" (por puzonado del tornillo)

$F_t = 0.50 F_u = 50\%$ Resistencia mínima a la tensión.

Para miembros conectados con pasadores en sus extremos:

$F_t = 0.45 F_y = 45\%$ Esfuerzo mínimo de fluencia.

Para miembros de lámina delgada doblada en frío según A.I.S.I.:

$F_t = 0.6 F_y = 60\%$ Esfuerzo mínimo de fluencia.

$T \leq T_a$

3.3 MIEMBROS A TENSION CON CONEXIONES SOLDADAS

El proporcionamiento de miembros a tensión con conexiones soldadas es relativamente simple; los inconvenientes principales son el de decidir qué forma o formas de miembro son más adecuadas y cómo se deben arreglar las conexiones para asegurar una buena posición de soldadura.

Las soldaduras deberán distribuirse de manera que no exista excentricidad entre la fuerza resultante de la soldadura y el centroide de la sección transversal del miembro.

Los cálculos para determinar la soldadura requerida y su arreglo para asegurar que es concéntrica son sencillos.

3.4. ESFUERZOS RESIDUALES Y PERFORACIONES DE LOS PERFILES.

Los esfuerzos residuales son esfuerzos internos presentes en las secciones de acero debidos principalmente al enfriamiento no uniforme en los perfiles laminados, al doblado en frío de las secciones de lámina delgada y a los procesos de fabricación. Los extremos de los patines y la parte central del alma de una sección I ó H, se enfriarán más rápidamente que las partes restantes, en la fabricación del perfil, este enfriamiento irregular se debe a que las partes ya antes mencionadas tiene mayor área expuesta por unidad de volumen. Como consecuencia, se presentan esfuerzos internos en la sección, cuya distribución tiene la siguiente forma indicada en la figura.3, y que puede ser del orden del 50 ó 60% del esfuerzo de fluencia del acero del cual están formados.

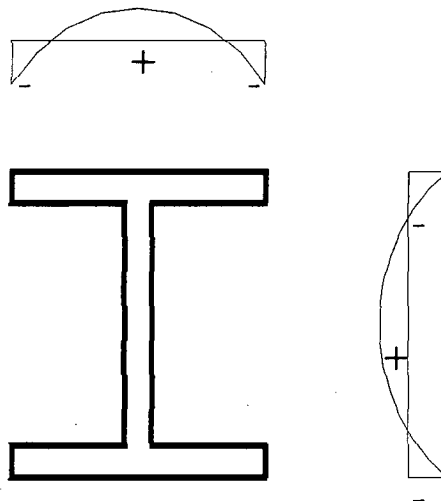
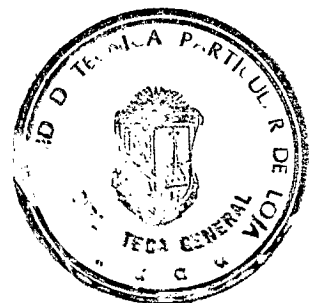


Figura. 3



El efecto de los esfuerzos residuales puede explicarse cualitativamente analizando la distribución de esfuerzos en una sección I idealizada, de acero de comportamiento elastoplástico ideal, sujeta a una fuerza de tensión creciente y con esfuerzos residuales de variación lineal, como se indica en la figura 4:

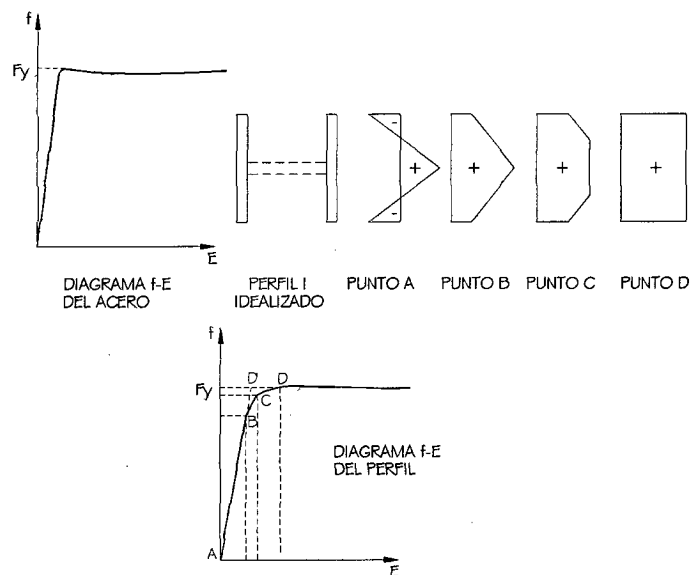


Figura.4

Si el perfil no presentara esfuerzos residuales, el diagrama esfuerzo-deformación correspondería a la línea BD'D. De los resultados podemos concluir lo siguiente:

- Los esfuerzos residuales no afectan la resistencia de fluencia de una barra solicitada a tracción.

- Los esfuerzos residuales sí cambian al esfuerzo en el límite de proporcionalidad, disminuyéndolo considerablemente con el que tendría en ausencia de éstos.
- Los esfuerzos residuales incrementan las deformaciones de la sección.

En resumen, la presencia de los esfuerzos residuales no tiene consecuencias importantes sobre la resistencia estática de un miembro tensionado. La presencia de agujeros o perforaciones en las barras tensionadas produce **concentraciones de esfuerzos** en los bordes de los huecos, cuyo efecto es similar al de los esfuerzos residuales, como se indica en la Figura 5.

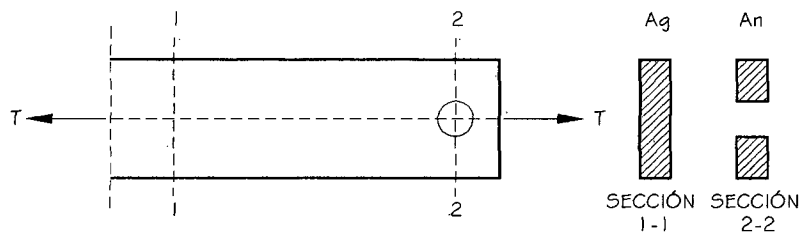


Figura 5.

El esfuerzo en la sección neta es:

$$f_n = \frac{T}{A_n}$$

Según AISC, en el caso de existir una serie de perforaciones que se ubican a lo largo de un miembro, en una línea quebrada, **el ancho neto** en ese tramo se calcula con la siguiente ecuación:

$$AnchoNeto = AnchoBruto - AnchoAgujero + \frac{s^2}{4 * g}$$

$$AISC.AnchoNeto \leq 0.85 AnchoBruto$$

Para el cálculo del **área neta**, el ancho del agujero para pernos o remaches, deberá considerarse 1/8 pulgada mayor que el diámetro nominal del tornillo. El **área neta crítica** es aquella que corresponde a la cadena de menor ancho, como se indica en la figura 6.

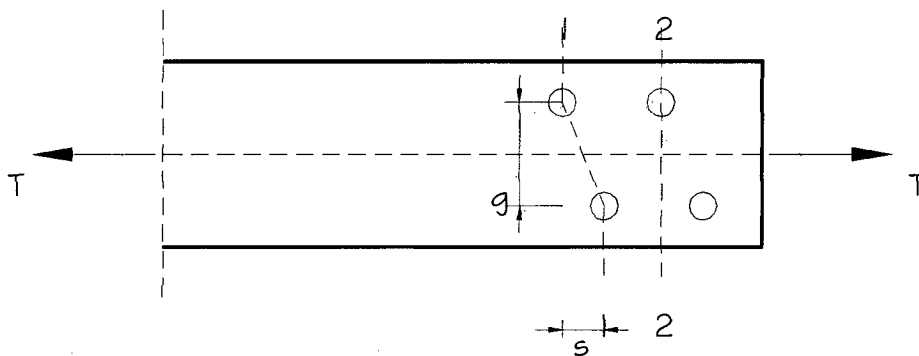


Figura. 6

3.5. ESBELTEZ MÁXIMA.

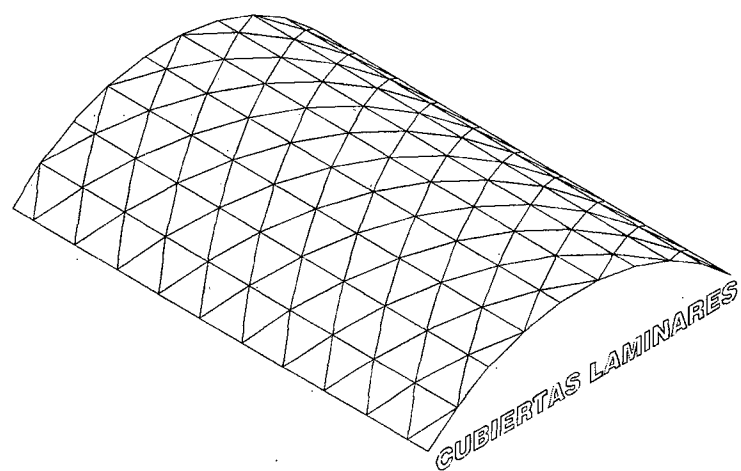
Con la finalidad de evitar movimientos laterales o vibraciones indeseables ocasionados por la excesiva flexibilidad de los miembros tensionados, se recomienda que su esbeltez no sobrepase las siguientes limitaciones que no son obligatorias.

Según AISC, se recomienda (excepto cuando la sección es circular):

$$\frac{L}{r} < 300$$

Para los miembros del sistema estructural que se diseñan para funcionar en tensión, pero que pueden experimentar cierta carga de compresión, no necesitan satisfacer los límites de esbeltez de miembros comprimidos.

La esbeltez máxima para las varillas de sección circular queda a juicio del diseñador, sin embargo, es práctica común usar diámetros no menores de 1/500 de la longitud del miembro.



CAPITULO IV

4. MIEMBROS A COMPRESIÓN.

4.1 INTRODUCCIÓN.

Los miembros sujetos a compresión tienden a pandear fuera del plano de carga.

La resistencia de los miembros expuestos a compresión depende del tipo de carga, de las propiedades del material, de la longitud, de las condiciones de restricción en los extremos y de la forma del miembro, así como de las imperfecciones del material y de la sección.

Las propiedades del material se caracterizan por medio de su módulo de elasticidad y su resistencia de fluencia. La Longitud L del miembro se toma como la distancia entre soportes, o como la longitud efectiva KL , la cual tiene en cuenta las condiciones de restricción de los extremos.

4.2 ESFUERZOS PERMISIBLES.

“Las especificaciones A.I.S.I. establecen un **esfuerzo básico de diseño** (F_b), aplicable a los casos de tensión directa y de compresión por flexión, que se determina dividiendo el esfuerzo de fluencia (F_y) del acero entre un factor de seguridad de 1.65:

$$F_b = \frac{F_y}{1.65}$$

Sin embargo, este esfuerzo básico de diseño es aplicable sólo a condiciones en las cuales los miembros fallan por fluencia, cuando la resistencia de un miembro está controlada por pandeo, deberá usarse un esfuerzo permisible o un área efectiva reducidos”.⁷

4.3. MIEMBROS A COMPRESIÓN.

Generalmente a los miembros a compresión se les denomina usualmente como columnas. Los miembros a compresión algunas veces se les llama postes o puntales.

Las secciones simples, tales como los perfiles canales, zetas, ángulos, secciones de “sombrero”, miembros tubulares, tes. y secciones I pueden usarse como miembros en compresión. De estos perfiles se pueden conseguir secciones armadas. Los elementos de unión pueden ser placas espaciales(separadores), barras en celosía(entrejado) o presillas. El tipo de sección usada depende de la capacidad que se desea dar a la columna y de las conexiones que se requieran para unirla a los demás miembros de la estructura.

⁷ BRESLER, LIN Y SCALZI. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. Cap. 14. Pág. 781. Edit. LIMUSA-WILEY.S.A.1970.

Entre las secciones más utilizadas, formadas con lámina delgada doblada en frío, se encuentran las mostradas en la figura.7.

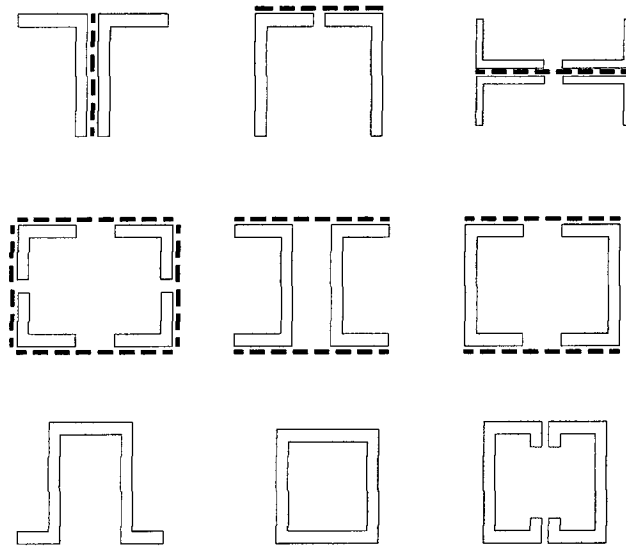


Figura. 7

4.4. CARGA CRÍTICA DE EULER.

La ecuación de Euler para el pandeo es válida para secciones transversales de lámina delgada, siempre que el esfuerzo calculado esté por debajo del límite de proporcionalidad, y para miembros que se encuentren libre de esfuerzos residuales, considerando que el material es perfectamente homogéneo e isotrópico.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 * E * A}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

4.5. PANDEO ELÁSTICO.

La determinación del esfuerzo permisible (F_a) para miembros sujetos a carga axial se basa en los tipos de falla tales como: pandeo lateral primario, elástico o inelástico, fluencia debida a esfuerzos locales excesivos, pandeo local, y finalmente pandeo torsional.

Consideremos un miembro sometido a compresión con una relación de esbeltez (KL/r). El pandeo puede presentarse cuando la carga excede la carga crítica P_{cr} , ya sea en el rango elástico o en el inelástico. El esfuerzo promedio que corresponde a esta carga es:

$$F_a = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

De acuerdo con las especificaciones AISC:

$$F_a = 0.50 * F_y = 50\% \text{ Esfuerzo mínimo de fluencia.}$$

El valor más bajo de la relación de esbeltez para el que puede presentarse el **pandeo elástico** es $(KL/r)_c = C_c$, y se define como:

$$(KL/r) = C_c$$

$$C_c = \left(\frac{KL}{r} \right)_c = \pi * \sqrt{\frac{2 * E}{F_y}}$$

4.6. PANDEO INELÁSTICO.

El pandeo inelástico ocurre, por lo general, con valores de la relación de esbeltez por debajo del valor límite del C_c , el esfuerzo puede determinarse con la siguiente expresión:

$$(KL/r) < C_c$$

$$F_a = \frac{\left[1 - 0.5 \left(\frac{KL}{r C_c} \right)^2 \right]}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{KL}{r C_c} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{KL}{r C_c} \right)^3}$$

Para miembros sometidos principalmente a carga axial y con relaciones de esbeltez efectiva iguales o mayores que C_c , el esfuerzo se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$(KL/r) \geq Cc$$

$$Fa = \frac{12 * \pi^2 * E}{23 * \left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

Para miembros secundarios en contraventeo (miembros que no soportan cargas primarias, y que se utilizan para arriostrar a otros miembros estructurales).

$$(KL/r) > 120 \text{ Miembros secundarios.}$$

Calculando con las dos primeras fórmulas e incrementando un factor de seguridad dado por la siguiente expresión:

$$Fs = \frac{1}{1.6 - \frac{L}{200r}}$$

$$Fas(miembros secundarios) = Fa * \frac{1}{1.6 - \frac{L}{200r}}$$

4.7. PANDEO TORSIONAL.

El pandeo torsional se presenta cuando la rigidez torsional del miembro es apreciablemente menor que su rigidez por su flexión, como es el caso de secciones abiertas de paredes delgadas; estas secciones pueden fallar ya sea de modo de pandeo torsional puro o por un modo combinado de torsión y flexión.

4.8. PANDEO LOCAL.

El pandeo local puro se presenta solamente en miembros cortos con esbelteces ($KL/r < 20$), y pequeños espesores de lámina. En miembros con esbelteces intermedias $20 < KL/r < 120$ se produce pandeo local por debajo de la carga última, pero debido a la resistencia de post-pandeo de las láminas de acero, la falla está controlada por una combinación de pandeo local con pandeo de miembro.

El pandeo local afecta a la sección efectiva en elementos atiesados, y al esfuerzo admisible en elementos no atiesados.



Propiedades de las secciones:

Las propiedades de las secciones, área, inercia, módulo resistente, radio de giro, etc. Deben ser calculados con base en la sección reducida por los criterios de diseño.

Elementos Comprimidos Atiesados:

Los anchos efectivos de diseño de los elementos comprimidos atiesados, sin atiesadores intermedios se determinan del siguiente modo:

- Las alas o almas son totalmente efectivas ($b=w$), si

$$\frac{w}{t} \leq \left[\frac{w}{t} \right]_{Lim.} = \frac{1434}{\sqrt{f}} \approx 37 \text{ (} f=1440 \text{ Kg/cm}^2 \text{)}.$$

En alas o almas que superan $(w/t)_{Lim.}$ El ancho efectivo es:

$$\frac{b}{t} = \frac{2122}{\sqrt{f}} \left[1 - \frac{464}{(w/t)\sqrt{ft}} \right] \leq \frac{w}{t}$$

Donde:

b : ancho efectivo de diseño.

w: ancho real del elemento.

t: espesor de la lámina.

f: esfuerzo real en la lámina tomando como base el área efectiva de diseño.

- En tubos cuadrados y rectángulos las alas o almas son totalmente efectivas

(b=w), si:

$$\frac{w}{t} \leq \left[\frac{w}{t} \right]_{Lim.} = \frac{1544}{\sqrt{f}} \approx 40 \text{ (f=1440 Kg/cm}^2\text{)}.$$

En alas o almas que superan (w/t)Lim, el ancho efectivo es:

$$\frac{b}{t} = \frac{2122}{\sqrt{f}} \left[1 - \frac{422}{(w/t)\sqrt{f}} \right] \leq \frac{w}{t}$$

Si los esfuerzos provienen de combinaciones de carga que incluyen viento o sismo, el ancho efectivo se calculará con 0.75 veces dicho esfuerzo (una reducción del 25% en el esfuerzo real).

Elementos Atiesados Múltiples.

Si la relación w/t de un subelemento no excede de 60, el ancho efectivo se determinará como si fuera un elemento atiesado. Si se sobrepasa este límite, el ancho efectivo calculado se reduce mediante la siguiente expresión:

$$\frac{be}{t} = \frac{b}{t} - 0.10 \left[\frac{w}{t} - 60 \right]$$

Donde:

be: ancho efectivo de diseño modificado.

b: ancho calculado de acuerdo a elementos comprimidos atiesados.

Rigidizadores.

El momento de inercia de los rigidizadores extremos debe ser mayor o igual a:

$$I_{min} = 1.83t^4 \sqrt{(w/t)^2 - (281480 / F_y)}$$

$$I_{min} = 9.2t^4$$

Donde:

I_{min}: momento de inercia mínimo del rigidizador.

w: ancho del elemento rigidizado.

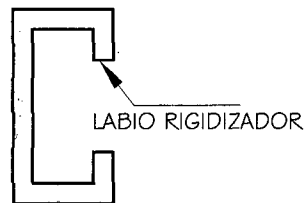
t: espesor del elemento rigidizado.



Si la rigidización se produce mediante un labio rigidizador extremo, en ángulo recto respecto al elemento rigidizado, su peralte mínimo debe ser:

$$d_{\min} = 2.80t \sqrt{(w/t)^2 - (281480 / F_y)}$$

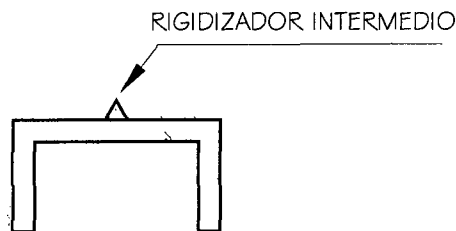
$$d_{\min} = 4.8t$$



Los rigidizadores intermedios deben tener una inercia superior al doble de aquella correspondiente a rigidizadores extremos.

$$I_{\min} = 3.66t^4 \sqrt{(w/t)^2 - (281480 / F_y)}$$

$$I_{\min} = 18.4t^4$$



Elementos no atiesados.

El pandeo local afecta a los elementos no atiesados reduciendo el esfuerzo admisible, de acuerdo a los siguientes criterios:

$$\text{Si } \frac{w}{t} \leq \left[\frac{531}{\sqrt{F_y}} \right] = 10 \text{ (Para } F_y = 2400 \text{ Kg/cm}^2 \text{).}$$

$$F_c = 0.60 F_y$$

$$\text{Si } \frac{531}{\sqrt{F_y}} < \frac{w}{t} < \left[\frac{1208}{\sqrt{F_y}} \right] \quad 10 < \frac{w}{t} < 24$$

$$F_c = F_y [0.767 - 3.15^{-4} \left(\frac{w}{t} \right) \sqrt{F_y}]$$

$$\text{Si } \frac{1208}{\sqrt{F_y}} \leq \frac{w}{t} < 25 \quad 24 < \frac{w}{t} < 25$$

$$F_c = \frac{562961}{(w/t)^2}$$

$$\text{Si } 25 < \frac{w}{t} \leq 60$$

En ángulos:

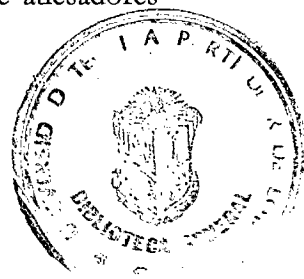
$$F_c = \frac{562961}{(w/t)^2}$$

En otros perfiles:

$$F_c = 1393 - 19.7(w/t)$$

Relaciones Ancho Espesor Límites.

Las máximas relaciones ancho-espesor admisibles, debido al efecto del pandeo local, en elementos de lámina delgada, sin considerar la presencia de atiesadores intermedios, son:



- Elementos comprimidos atiesados con un extremo conectado a un labio atiesador. $(w/t) \leq 60$.
- Elementos comprimidos atiesados con un extremo conectado a un atiesador exterior $(w/t) \leq 90$.
- Elementos comprimidos atiesados por almas o alas en los dos extremos $(w/t) \leq 500$.
- Elementos no atiesados $(w/t) \leq 60$.

4.9 PANDEO GENERAL DE FLEXIÓN.

El pandeo general de flexión se produce en miembros con esbelteces $KL/r > 20$.

La falla por pandeo general está gobernada por la ecuación de Euler.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EA}{(KL / r)^2}$$

Donde:

E: Módulo elástico del acero.

A: Área de la sección.

KL: Longitud de pandeo.

r: Radio de giro.

El esfuerzo admisible en miembros sometidos exclusivamente a pandeo general de miembro es:

$$F_C = \frac{12\pi^2 E}{23(KL / r)^2} = \frac{10689000}{(KL / r)^2}$$

4.10 FALLA POR APLASTAMIENTO.

Este tipo de falla se produce solamente en miembros cortos, con esbelteces $KL/r < 20$, y espesores considerables de la lámina. Toda la sección de miembro alcanza a desarrollar el esfuerzo de fluencia, el momento de colapso, por lo que el esfuerzo de trabajo de la sección no debe superar el esfuerzo básico admisible.

$$\frac{P}{A} \leq 0.60F_y$$

4.11 LONGITUD EFECTIVA.

El valor de la carga crítica de pandeo elástico para miembros a compresión con otras condiciones en sus extremos, puede obtenerse sustituyendo en la solución general, las condiciones de frontera correspondientes. Esas cargas críticas pueden

relacionarse con la carga crítica del caso fundamental, introduciendo un factor de longitud efectiva **K**, de tal manera que:

$$Pe = \frac{\pi^2 EI}{(Kl)^2}$$

El esfuerzo crítico de pandeo elástico:

$$Fe = \frac{Pe}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(Kl)^2 A}$$

$$Fe = \frac{\pi^2 E}{(Kl / r)^2}$$

Donde:

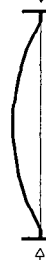
r: $(I/A)^{1/2}$: radio de giro de la sección transversal.

l: longitud no soportada lateralmente.

Kl: longitud efectiva del miembro a compresión.

Kl/r: esbeltez del miembro a compresión.

En la tabla siguiente adaptada del AISC, se muestran los valores de la carga crítica de pandeo elástico, del factor de longitud efectiva teórico y del factor de longitud efectiva recomendado cuando las diversas condiciones de extremo son aproximadas a las condiciones ideales.

						
P_e	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{2.04\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{4L^2}$
KTEORICO	1.00	0.50	0.70	1.00	2.00	2.00
KRECOM.	1.00	0.65	0.80	1.20	2.10	2.00

4.12 ESBELTEZ MÁXIMA.

Con la finalidad de evitar movimientos laterales o vibraciones indeseables debido a la excesiva flexibilidad de los miembros tensionados, se recomienda que su esbeltez no sobrepase ciertos valores; estas limitaciones no son obligatorias. Se recomienda excepto cuando la sección es circular:

$$L/r < 300$$

Aquellos miembros del sistema estructural que se diseñan para funcionar en tensión, pero que pueden experimentar cierta carga de compresión, no necesitan satisfacer los límites de esbeltez de miembros comprimidos.

La esbeltez máxima para las varillas de sección circular queda a juicio del diseñador; sin embargo, es práctica común usar diámetros no menores de $1/500$ de la longitud del miembro.

4.13 MIEMBROS TUBULARES CILÍNDRICOS EN COMPRESIÓN.

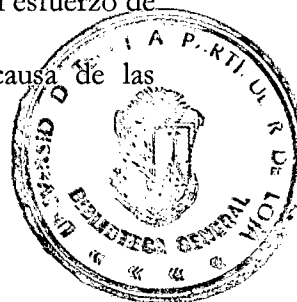
“Los tubos cilíndricos son económicos para miembros en compresión debido a la gran relación de su radio de giro al área, la cual permanece constante para todos los ejes.

Los miembros tubulares de pared delgada pueden fallar por pandeo local y/o de conjunto, y deben investigarse ambas condiciones para determinar su capacidad de carga.

Al utilizar tubos o secciones tubulares hay dos consideraciones que pueden ser de importancia.

Primero, deberá evitarse el pandeo local a esfuerzos por debajo de la resistencia de fluencia, y segundo, una restricción más severa, la tendencia a pandearse localmente no deberá reducir la carga general de pandeo del miembro.

Las pruebas de laboratorio han demostrado que los valores reales del esfuerzo de pandeo son mucho menores que los teóricos, en gran parte a causa de las



imperfecciones geométricas de la sección. Las especificaciones AISI basan sus reglas en la investigación de Plantema y en otros experimentos realizados en la Universidad de Illinois(EEUU), representados gráficamente como se indica en la figura 8.

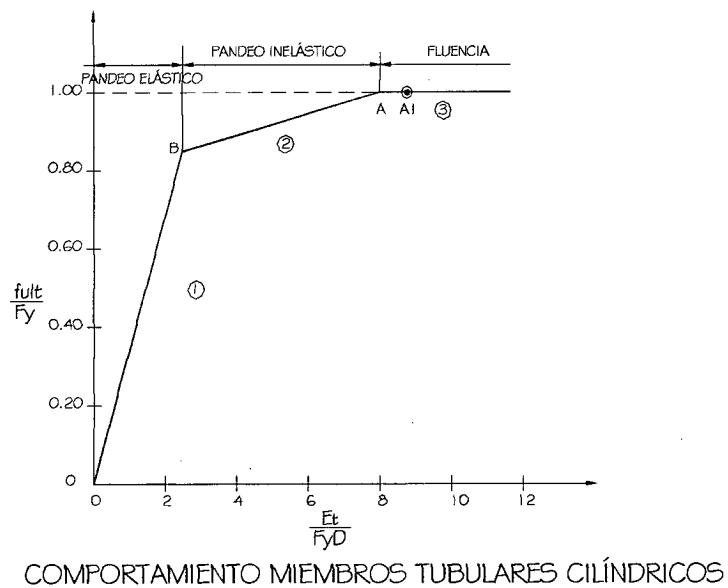


Figura 8.

La curva indicada que la relación f_{ult}/F_y del esfuerzo último en el instante de la falla al de fluencia depende del parámetro $E_t/F_y D$. Con base en este estudio, las especificaciones AISI dictan conservadoramente que la relación D/t del diámetro medio al espesor de la pared debe ser

$$\frac{D}{t} \leq \frac{3300000}{F_y} \quad (F_y \text{ en lb/plg}^2)$$

$$\frac{D}{t} \leq \frac{2320023}{F_y} \quad (F_y \text{ en Kg/cm}^2)$$

Sobre esta base, no se presentará el pandeo local y serán aplicables las fórmulas de columnas, con Q igual a uno.”⁸

⁸ BRESLER, LIN Y SCALZI. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. Cap. 14. Pág. 797. Edit. LIMUSA-WILEY. SA. 1970

5. CONEXIONES SOLDADAS.

5.1. INTRODUCCIÓN.

Las conexiones soldadas se usan a menudo a causa de la simplicidad de diseño, menos partes, menos material y disminución en el manejo de taller y en las operaciones de fabricación. Con frecuencia resulta ventajoso aplicar una combinación de soldadura de taller y empernado en obra.

Las conexiones soldadas tienen una rigidez que puede ser ventajosa si se tiene en cuenta de manera adecuada en el diseño, por ejemplo, las armaduras soldadas se deflectan menos que las armaduras empernadas, porque el extremo de un miembro soldado en una junta no puede rotar con respecto a los demás miembros existentes allí. Si el extremo de una viga está soldado a una columna, la rotación es prácticamente la misma que para la columna y la viga. Si está hecha en forma adecuada, una soldadura diseñada de manera apropiada deberá ser más fuerte que el metal base, en caso contrario, hasta una soldadura de buen aspecto puede ser inservible.

5.2. SOLDADURA.

La soldadura es la unión de dos piezas de metal, que se realiza mediante la fusión de la zona de contacto. La soldadura de arco eléctrico, es la más utilizada en la

construcción de estructuras de acero. Consiste en producir un cortocircuito mediante el electrodo de soldadura, que lo funde junto con el metal base en el lugar de aplicación, para conseguir la continuidad del material en la conexión después del enfriamiento. Los electrodos generalmente están recubiertos con un material que produce un gas inerte cuando la corriente funde el metal, que provee condiciones favorables para la unión de las piezas.

Los factores que más intervienen en la calidad y en la resistencia estática de la soldadura de arco eléctrico son el tipo y características del electrodo utilizado, la intensidad y voltaje de la corriente eléctrica, las condiciones de las partes a unir, y la habilidad del operador para conseguir la adecuada fusión del metal base y del metal de aportación.

Características importantes de la soldadura son:

- Es el método más rápido, más económico y mejor que cualquier otro para realizar uniones.
- Es un proceso simple con detalles muy complejos.
- La mejor conexión soldada es aquella que se asemeja a una conexión inexistente.
- Una secuencia apropiada en el proceso de soldadura minimiza los esfuerzos residuales y las restricciones de deformación.
- Los soldadores deben ser calificados antes de operar una edificación.

- Las soldaduras importantes deben inspeccionarse mediante métodos adecuados para asegurar una calidad permanente.
- En cada conexión debe utilizarse el electrodo más apropiado.

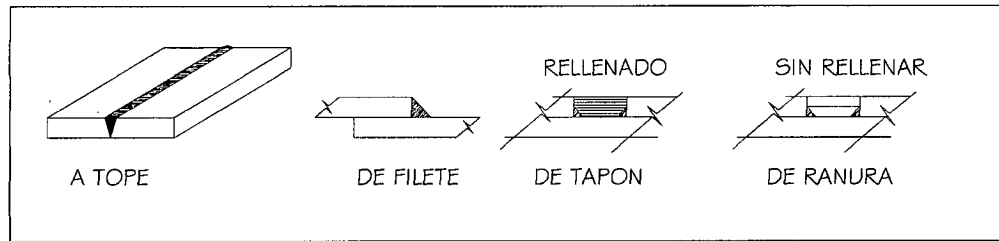
Otro proceso de soldadura que se permite en las conexiones de los miembros de lámina delgada doblada en frío es la soldadura de punto (de resistencia), que se consigue mediante la aplicación de los electrodos que al mismo tiempo ejercen una presión entre las dos partes (placas y partes paralelas o traslapadas) que se desea unir.

5.3. TIPOS DE SOLDADURA.

Los principales tipos de soldadura usadas para el acero estructural son:

- **Soldadura a tope o de penetración:** se forma cuando se trata de unir placas colocadas una frente a la otra, como se indica en la figura 9. Dependiendo de la profundidad del metal de aportación, puede ser de penetración completa (total) o incompleta (parcial).
- **Soldadura de filete:** se forma cuando los bordes de las piezas que se desea unir, forman un ángulo generalmente de 90° .
- **Soldadura de tapón y de ranura:** se forman cuando se trata de unir dos placas colocadas una sobre la otra (traslapadas), colocando el metal de aportación en una perforación de forma circular o alargada.



**Figura. 9**

5.4 ELECTRODOS.

Sus características se describen a través de una denominación que consta de una letra y cuatro dígitos.

EXX_xYZ

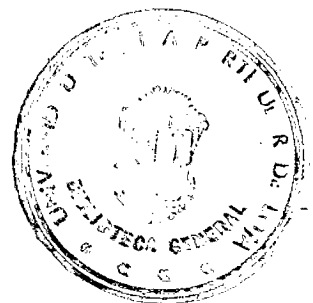
Donde :

E: símbolo básico.

XX_x: resistencia a la tensión del metal de aportación, en Ksi.

Y: posición en el proceso de soldadura:

1. Todas las posiciones.
2. Filete horizontal y posición en el plano.



Z: corriente directa o alterna:

0. Polaridad inversa (el electrodo es el ánodo (+)).
1. Todo tipo.

Los más utilizados en la construcción de estructuras de acero estructural A36 son los electrodos **E6011 y E7011**, cuyas resistencias especificadas a la tracción son:

Electrodo E60: $60\text{Ksi}=4320 \text{ Kg/cm}^2$.

Electrodo E70: $70\text{Ksi}=4930 \text{ Kg/cm}^2$.

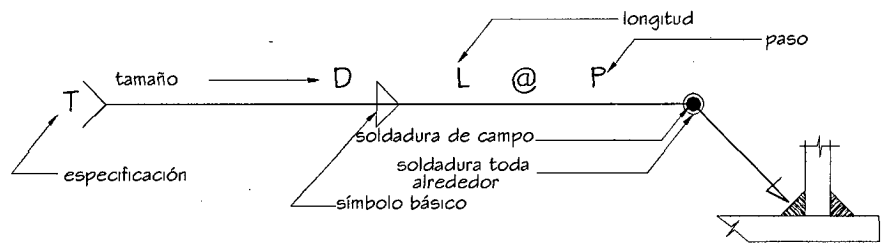
El esfuerzo de fluencia del metal base está limitado por la norma AWS D1.1, dependiendo de la resistencia del electrodo utilizado en la conexión:

Electrodo E60: $F_y < 42\text{Ksi}=2960 \text{ Kg/cm}^2$. en el metal base.

Electrodo E70: $F_y < 55\text{Ksi}=3870 \text{ Kg/cm}^2$. en el metal base.

5.5 SÍMBOLOS DE SOLDADURA.

En los planos de diseño se utilizan los símbolos que se muestran en la figura.10, para especificar las características más importantes de una conexión hecha con soldadura.



DE FILETE	DE TAPÓN Ó DE RANURA	A TOPE O DE PENETRACION						
		PREPARACION DE LAS PIEZAS						
		RECTÁN GULAR	V	BISEL	U	J	BOCEL DOBLE	BOCEL SIMPLE

Figura 10.

5.6 BASES DE DISEÑO.

Según AISI, E1, las conexiones se diseñan para transmitir la máxima carga en el miembro conectado.

Según AISI, E2, las soldaduras de arco en las que las partes conectadas tienen espesores mayores que 4.6 mm, deben satisfacer los requisitos de las especificaciones AISC. Cuando alguna de las partes conectadas tiene un espesor menor o igual a 4.6 mm, la soldadura de arco debe satisfacer los requisitos de la norma AWS D-1.3.

La carga aplicada en cada soldadura no debe exceder la carga admisible:

$$Pa = \frac{Pn}{\Omega_w}$$

Donde Pn: resistencia nominal de la soldadura.

$$\Omega_w = 2.50.$$

5.7 SOLDADURA A TOPE.

5.7.1 ÁREA EFECTIVA.

La soldadura a tope se utiliza principalmente en los empalmes de columnas y de miembros armados con placas. La orientación de los esfuerzos aplicados no tiene efecto significativo en la resistencia de las soldaduras a tope.

El área efectiva de la soldadura a tope se obtiene con la expresión:

$$A_e = LT$$

Donde :

L: longitud efectiva, dada por el ancho de la parte conectada.

T: espesor efectivo de la garganta, determinado por la pieza conectada más gruesa, excepto que, no debe exceder el espesor de la parte conectada más delgada.

Para soldadura a tope con penetración total, el espesor efectivo de la garganta es el espesor de la parte conectada más delgada.

Para soldadura a tope con penetración parcial, el espesor efectivo de la garganta:

- para uniones con bordes en J,U ó V con ángulo mayor o igual a 60° es el espesor del chaflán.
- para uniones con bordes en V con ángulo comprendido entre 45° y 60° es el espesor del chaflán menos 3 mm.

5.7.2 ESFUERZOS ADMISIBLES.

El esfuerzo admisible de la soldadura a tope con penetración total, para tensión normal al área efectiva, compresión normal al área efectiva y tensión o compresión paralela al eje de la soldadura, es igual al del metal base, y para corte en el área efectiva:

$$F_{wv}=0.30F_{ue}.$$

El esfuerzo admisible de la soldadura a tope con penetración parcial, para compresión normal al área efectiva y tensión o compresión paralela al eje de la soldadura, es igual al del metal base.

El esfuerzo admisible de la soldadura a tope con penetración parcial, para corte paralelo al eje de soldadura:

$$F_{wv}=0.30F_u.$$

El esfuerzo admisible de la soldadura a tope con penetración parcial, para tensión normal al área efectiva:

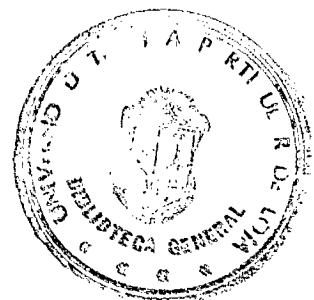
$$F_{wt}=0.30F_u < 0.60F_y.$$

5.7.3 RESISTENCIA NOMINAL.

Según AISI, E2.1, la resistencia nominal de una soldadura de penetración en una conexión a tope, por uno o ambos lados, se determina con la base de la menor resistencia del metal base en la conexión, siempre que obtenga “consistentemente” una garganta efectiva igual o mayor que el espesor del material.

5.7.4 LIMITACIONES DE DISEÑO.

El espesor efectivo mínimo de la garganta de una soldadura a tope con penetración parcial es la siguiente:



Espesor de la parte más gruesa	Espesor efectivo mínimo
De la unión (t)	de la garganta (D)
(mm)	(mm)
$t \leq 6$	3
$6 < t \leq 13$	5
$13 < t \leq 19$	6
$19 < t \leq 38$	8
$38 < t \leq 57$	10
$57 < t \leq 152$	13
$t > 152$	16

5.8 SOLDADURA DE FILETE.

5.8.1 ÁREA EFECTIVA.

La mayoría de las conexiones soldadas de las edificaciones civiles se realiza con este tipo de unión, que está constituida por un cordón o filete que une las dos piezas que se desea conectar. Su tamaño está definido por las longitudes de los dos lados del triángulo rectángulo inscrito en la sección transversal del metal de aportación.

La distribución de los esfuerzos varia según la disposición del eje de la soldadura respecto a la dirección de la carga aplicada. Un filete de soldadura perpendicular a la dirección de la carga es un 45% más efectivo que uno paralelo a esa dirección.

El área efectiva de la soldadura de filete se obtiene con:

$$A_e = LT$$

Donde: L: longitud efectiva del filete, dada por la longitud total del cordón completo, incluyendo las “vueltas” en las esquinas.

T: espesor efectivo de la garganta, que es la menor distancia entre la raíz de la unión y la hipotenusa del triángulo inscrito, como se muestra en la figura 11.

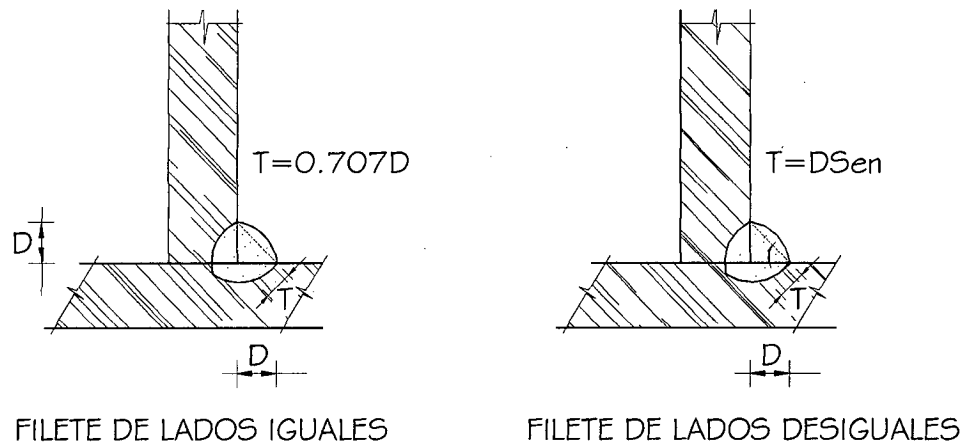


Figura. 11

Para filetes de lados iguales: $T = 0.707D$

Para filetes de lados desiguales $T = D \text{sen} \alpha$.

5.8.2 ESFUERZOS ADMISIBLES.

El esfuerzo admisible de la soldadura de filete para tensión o compresión paralela al eje de la soldadura, es igual al del metal base, y para corte en el área efectiva:

$$F_{wv}=0.30F_{ue}.$$

Puesto que el esfuerzo resistido por el filete de soldadura debe transferirse al metal base en la unión, el tamaño máximo de un filete (de lados iguales) puede estar determinado por la resistencia al corte del metal base:

$$(0.30F_{ue})L(0.707D)\leq 0.40F_yL_t$$

de donde: $D_{\text{máx.}} = 1.89(F_y/F_{ue})t$

Para acero A36 y electrodo E60: $D_{\text{máx.}}=1.13t$.

Para acero A36 y electrodo E70: $D_{\text{máx.}}=0.97t$.

5.8.3 RESISTENCIA NOMINAL.

La resistencia nominal en cortante, de una soldadura de filete en uniones de traslape y en 'T', es:

Para carga longitudinal:

Cuando $L/t < 25$

$$P_n = (1 - 0.01L/t)tL F_u$$

Cuando $L/t \geq 25$:

$$P_n = 0.75tL F_u$$

Para carga transversal:

$$P_n = tL F_u$$

Además, cuando $t > 3.8\text{mm}$, la resistencia nominal de una soldadura de filete en uniones de traslape y en 'T', no debe exceder de:

$$P_n = 0.75 t_w L F_{xx}$$

Donde: **t**: menor espesor de las placas de conexión.

L: longitud del filete de soldadura.

t_w : garganta efectiva del filete.

F_u : resistencia a tensión del acero.

F_{xx} : designación del nivel de esfuerzo en la clasificación del electrodo del AWS.

5.8.4 CARGA ADMISIBLE POR UNIDAD DE LONGITUD.

Para el diseño de las soldaduras de filete de lados iguales se puede obtener un valor de la carga admisible por unidad de longitud efectiva del Filete **P_{wa}** .

$$P_{wa} = F_{wv} A_e$$

$$P_{wa} = (0.30 F_{ue}) L (0.707 D)$$

$$P_{wa}/L=(0.30 \times 0.707 F_{ue})D$$

$$P_{wa}=(0.212 F_{ue})D$$

Para electrodo E60: $P_{wa}=900 D$.

Para electrodo E70: $P_{wa}=1050 D$.

5.8.5 LIMITACIONES DE DISEÑO.

El tamaño mínimo de las soldaduras de filete depende del espesor de la parte más gruesa que se desea unir, excepto que no necesita exceder el espesor de la pieza más delgada, aunque se permite un espesor mayor si es requerido en el cálculo. Los límites permitidos son:

Espesor de la parte más gruesa De la unión (t) (mm)	Espesor efectivo mínimo de la garganta (D) (mm)
$t \leq 6$	3
$6 < t \leq 13$	5
$13 < t \leq 19$	6
$t > 19$	8

El tamaño máximo de las soldaduras de filete que se permite a lo largo de los bordes de las partes conectadas es:

Espeador de los bordes de	Tamaño máximo
Las partes (t)	del filete (D)
(mm)	(mm)
$t \leq 6$	t
$t > 6$	t-2

“La longitud efectiva mínima de las soldaduras de filete diseñadas con base en la resistencia, no deberá ser menor que cuatro veces su tamaño nominal, ó el tamaño del filete se considerará que no excede a $\frac{1}{4}$ de su longitud efectiva. Si se utilizan filetes longitudinales en las conexiones de extremo de barras planas en tensión, la longitud de cada filete no debe ser menor que la distancia perpendicular entre ellos. La distancia transversal entre los filetes longitudinales utilizados en las conexiones de extremo de miembros tensionados no debe exceder de 20 cm.

Se permiten filetes intermitentes para transferir los esfuerzos calculados a través de una conexión o en las superficies adyacentes, cuando la resistencia requerida es menor que aquella que se obtiene de un filete continuo de menor tamaño permitido, y para conectar los componentes de los miembros armados. La longitud efectiva de cualquier segmento de una soldadura de filete intermitente, no debe ser menor que 4 veces su tamaño, con un mínimo de 38mm.

En conexiones traslapadas, el traslape mínimo será de 5 veces el espesor de la parte conectada más delgada, pero no menor que 25mm. Las conexiones traslapadas que unen placas o barras sujetas a esfuerzos axiales deben tener filetes de soldadura a lo largo de los extremos de las dos partes, excepto donde la deflexión de las partes traslapadas está suficientemente restringida para prevenir la apertura de la unión bajo carga máxima.

Se permiten filetes de soldadura en agujeros o ranuras, para transmitir el corte en conexiones traslapadas, o para prevenir el pandeo o la separación de las partes traslapadas, y para conectar los componentes de miembros armados.

Los filetes de soldadura en bordes o extremos que terminan en extremos o bordes, respectivamente, deben tener vueltas continuas en las esquinas, cuando sea posible, en una longitud no menor que 2 veces el tamaño nominal de la soldadura. Esta prescripción se aplica a ménsulas, asientos de viga y conexiones similares, en el plano respecto al que se calculan los momentos flectores. Para ángulos conectores y conexiones de placa de apoyo simple, que dependen de la flexibilidad de sus alas para constituir conexiones flexibles, las vueltas de extremo no debe exceder de 4 veces el tamaño nominal del filete. Los filetes de soldadura ubicados en los lados

opuestos de un plano común deben interrumpirse en la esquina común. Las vueltas de extremo deben indicarse en los planos de diseño y detalle.”⁹

5.9 CAPACIDAD ADMISIBLE DE CONEXIONES SOLDADAS.

Para Fuerzas concéntricas y cortantes, los procedimientos de diseño consideran que la soldadura de filete está orientada en la dirección menos conveniente(paralela a la dirección de la carga) y asumen que la fuerza es uniformemente distribuida en la longitud efectiva del filete, independientemente de su orientación.

Fuerzas cortantes excéntricas y momento de torsión en soldadura de filete, la fuerza directa y la fuerza cortante debida a torsión se consideran separadamente, superponiendo luego los efectos. La fuerza directa se supone distribuida uniformemente sobre la longitud soldada.

Los esfuerzos de torsión se consideran variables linealmente desde el centroide del área efectiva. El esfuerzo en un punto ubicado a una distancia r medida desde el centroide de la soldadura, producido por un momento de torsión M_t se calcula con:

$$f_t = \frac{M_t r}{J}$$

⁹ ARELLANO B. Roberto E. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO. Diseño por Esfuerzos Permisibles. CÁP. 8 Pág.215. Edit.DocuCentro.1998.



Donde J: momento polar de inercia del filete de soldadura, respecto a su centroide.

Pero: $J = TJ'$

Donde:

T: garganta efectiva del filete de soldadura.

J': momento polar de inercia de una "línea de soldadura", respecto a su centroide.

Sustituyendo: $f_v = \frac{Mtr}{TJ'}$

$$f_v T = \frac{Mtr}{J'}$$

$$P_{wt} = \frac{Mtr}{J'}$$

Donde: Pwt : fuerza por unidad de longitud del filete, producida por la torsión.

Esta fuerza unitaria se puede descomponer en sus proyecciones sobre los ejes principales:

$$P_{wt_x} = \frac{Mty_m}{J'}$$

$$P_{wt_y} = \frac{Mtx_m}{J'}$$

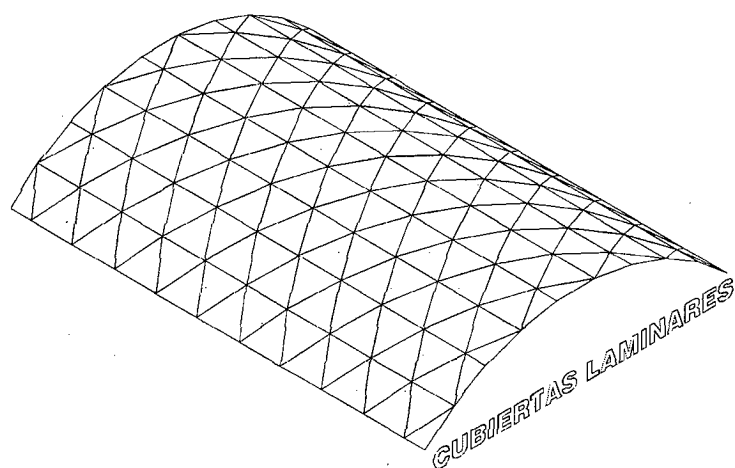
Donde:

Pwt_x: componente de la fuerza unitaria debida a torsión, en la dirección x.

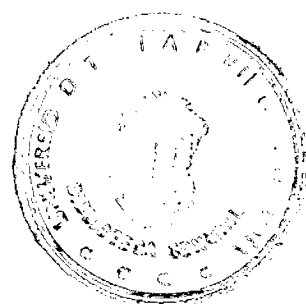
Pwt_y: componente de la fuerza unitaria debida a torsión, en la dirección y.

x_m: proyección de la distancia r, en la dirección x.

y_m: proyección de la distancia r, en la dirección y.



CAPITULO VI



6. TEORÍA DE LA LÁMINA CILÍNDRICA RETICULADA DE DIRECTRIZ CIRCULAR

6.1. GENERALIDADES.

La idea de conseguir una estructura metálica cuya resistencia se confíe al efecto lámina nace de la consideración conjunta de las ventajas económicas y estéticas de las láminas continuas de hormigón, por un lado, y de la ligereza de las estructuras metálicas ordinarias, por otro.

Las cubiertas laminas de hormigón permiten, en general, una notable economía de materiales; la misma que, a menudo, queda en gran parte contrarrestada por el elevado costo relativo de la cimbra y encofrado, de único empleo en la mayoría de los casos.

Por otra parte, en este tipo de estructuras, y especialmente en las cubiertas de grandes luces, el peso propio constituye un sumando de la mayor importancia dentro de las cargas totales que debe resistir la estructura, y conviene, por tanto, reducirlo al mínimo posible. Entre las cubiertas continuas de hormigón, las láminas representan la solución de mínimo peso; éste es, no obstante, mucho mayor que el de una estructura metálica con cubierta de fibrocemento o similar y protegida interiormente, si fuese necesario, por un revestimiento de materiales aislantes.

Pero las estructuras metálicas ordinarias, cerchas, pórticos, etc., necesitan con frecuencia de elementos resistentes dispuestos en el interior de la nave, que muchas veces estorban y que casi siempre son rechazables desde el punto de vista estético. Estas consideraciones sugieren la idea de aplicar a las estructuras metálicas los métodos de cálculo de las láminas continuas, pero reemplazando la lámina por una ligera retícula triangular inscrita en la superficie teórica de aquélla.

La retícula triangular, equilátera o no, es muy fácilmente adaptable a las superficies desarrollables, entre ellas las cilíndricas. En este caso, como puede apreciarse en la figura 12, la retícula está formada por generatrices continuas y dos sistemas diagonales con inclinaciones simétricas respecto a la directriz. El actual desarrollo de la soldadura permite utilizar con ventaja perfiles comerciales ordinarios sin ningún trabajo de mecanización.

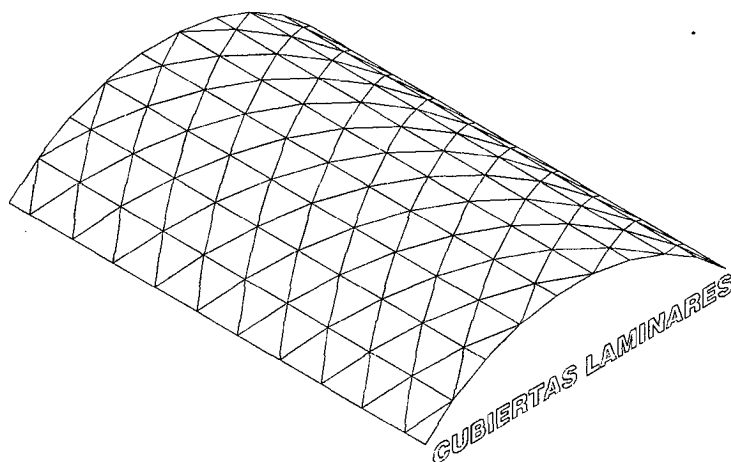
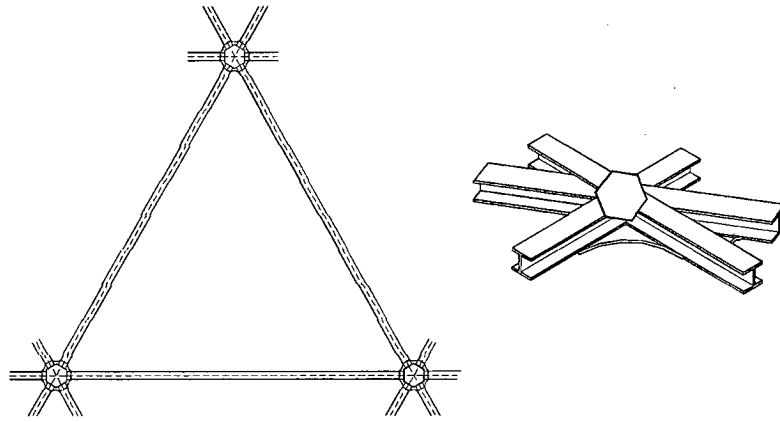


Figura 12

**Figura 13**

Los nudos (Fig.13) se han proyectado de forma que todos los cordones puedan depositarse cómodamente sin necesidad de hacer girar al conjunto. No es necesario insistir sobre la sencillez de las operaciones de taller y montaje en este tipo de cubiertas.

El único precedente conocido de esta idea son las cimbras de las cúpulas interiores de los planetarios alemanes construidas en los años 1925 al 1930, y constituidas también, en su estructura resistente, por una retícula metálica triangular. Se han construido cubiertas cilíndricas de este tipo, unas con perfiles especiales patentados, fabricados con chapa embutida, y otras con perfiles laminados ordinarios; pero siempre en ellas, hasta ahora, se ha fiado su resistencia al efecto bóveda y no al efecto lámina.

6.2. TEORÍA DE LA LÁMINA CILÍNDRICA RETICULADA DE DIRECTRIZ CIRCULAR.

La teoría de las láminas cilíndricas continuas está completamente elaborada y suficientemente comprobada por unos treinta años de aplicación. Esta teoría, en su forma clásica, fue expuesta en la Monografía número 85 del Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento por E. TORROJA Y J. BATANERO.

En lo que sigue se supone que el mecanismo de transmisión de las cargas superficiales se realiza mediante esfuerzos tipo membrana; hipótesis perfectamente admisible cuando se trata de cargas continuas, ya que los errores introducidos son despreciables.

De acuerdo con lo anterior, se dividirá el cálculo en dos partes: la primera estará dedicada al estudio general de la lámina, prescindiendo de las cargas exteriores superficiales, y teniendo únicamente en cuenta cargas lineales en los bordes longitudinales (sistema homogéneo); y la segunda comprenderá el estudio membrana para transmisión de las cargas superficiales. La superposición de los dos estados anteriores con las condiciones de borde que se impongan da en las láminas continuas el plexo tensional definitivo en las condiciones supuestas.

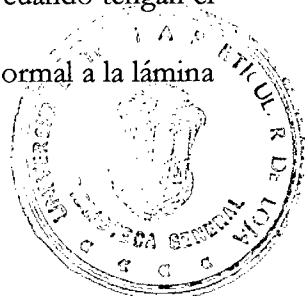
6.3. SISTEMA HOMOGÉNEO.

“Como simplificación a la teoría general, se supondrá en lo que sigue que los esfuerzos tangenciales en el plano de la lámina $N_{\varphi x}$ y $N_{x\varphi}$ son iguales, lo que implica la nulidad de la componente tangencial del momento de torsión. Análogamente se supone la igualdad de los momentos de torsión $M_{\varphi x}$ y $M_{x\varphi}$.

Situados sobre la lámina, el origen de las x será el apoyo dorsal y el de las φ , el borde derecho, tal como se indica en la figura 14.

El esfuerzo longitudinal por unidad de longitud N_x , así como el transversal N_φ , serán positivos cuando soliciten a tracción el elemento considerado. El esfuerzo tangencial $N_{\varphi x}$ será positivo cuando represente una tracción según los valores crecientes de x y φ . El momento flector longitudinal M_x y el momento flector transversal M_φ serán positivos cuando produzcan tracción en el intradós de la lámina. Los esfuerzos cortantes normales a la lámina Q_x y Q_φ serán positivos cuando actúen hacia arriba en las caras más próximas al eje de las φ o de las x , respectivamente. El momento de torsión $M_{\varphi x}$ es positivo cuando produce un esfuerzo tangencial positivo en el intradós.

Los corrimientos longitudinal y tangencial u y v serán positivos cuando tengan el sentido de las x ó φ positivas, respectivamente, y el corrimiento normal a la lámina



w se considerará positivo hacia el trasdós.

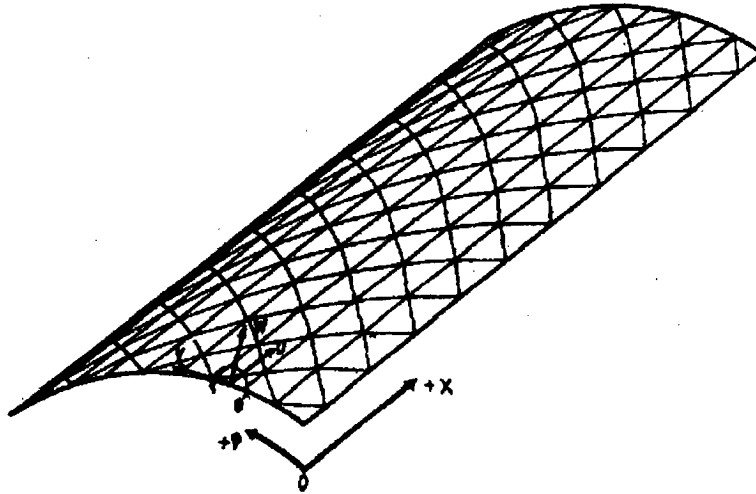


Figura 14

La rotación de la lámina θ será positiva cuando la sección gire según las agujas del reloj (Fig. 14.).¹⁰

6.3.1. DETERMINACIÓN DE ECUACIONES.

Con las simplificaciones y convenio de signos anteriores, las ecuaciones de equilibrio quedan en la forma:

$$r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = 0,$$

¹⁰ POZO VINDEL, Florencio J. Del. ESTUDIO DE CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS RIGIDIZADAS. Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento. Madrid-España. 1990.

$$\frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} - Q_{\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial Q_{\varphi}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_{\varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} - r Q_{\varphi} = 0,$$

$$r \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - r Q_x = 0,$$

r es el radio de la lámina.

Despejando Q_x y Q_{φ} de las dos últimas ecuaciones y sustituyéndolos en las tres primeras, el sistema anterior se convierte en el siguiente:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} - \frac{l}{r} \left[\frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} \right] &= 0 \\ \frac{l}{r} \left[\frac{\partial^2 M_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + 2r \frac{\partial^2 M_{\varphi x}}{\partial x \partial \varphi} + r^2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \right] + N_{\varphi} &= 0 \\ Q_{\varphi} &= \frac{l}{r} \left[\frac{\partial M_{\varphi}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} \right] \\ Q_x &= \frac{l}{r} \left[r \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \right\} [1]$$

Al sistema anterior, formado por las ecuaciones de equilibrio del elemento de lámina no le afecta para nada la constitución interna de éste y es aplicable tanto a las láminas continuas como a las reticuladas. Por el contrario, al

establecer las relaciones que ligan los esfuerzos con las deformaciones y corrimientos, para superar la hiperestaticidad interna de la lámina hay que tener en cuenta las características elásticas del elemento de ésta.

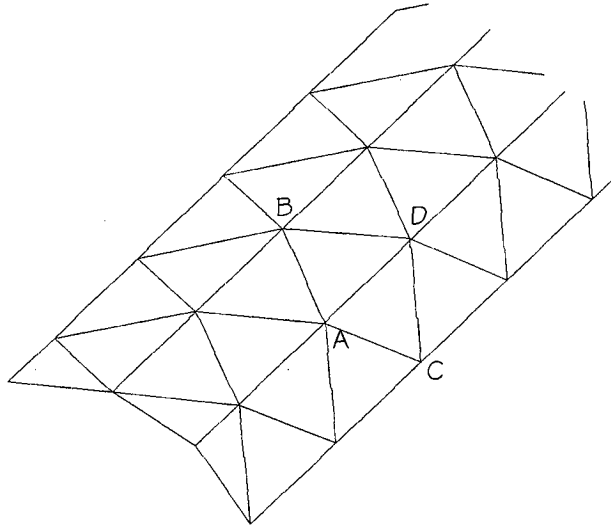


Figura 15.

Se supone la lámina constituida por una malla infinitesimal de triángulos equiláteros (fig. 15), y se considerará como elemento diferencial a uno cualquiera de los rombos formados por dos triángulos adyacentes con el lado común dispuesto según la generatriz: el A B C D, por ejemplo.

Se plantea, por lo tanto, un problema de elasticidad en que el cuerpo ideal



elástico considerado es homogéneo, pero no isótropo; dentro de su anisotropía tiene, sin embargo, tres planos de simetría elástica. Y por ello, las constantes elásticas son en número de 12, pudiéndose escribir:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= A\varepsilon_x + B\varepsilon_\varphi + H\varepsilon_z \\ \sigma_\varphi &= C\varepsilon_x + D\varepsilon_\varphi + L\varepsilon_z \\ \sigma_z &= M\varepsilon_x + N\varepsilon_\varphi + P\varepsilon_z \\ \tau_{x\varphi} &= G\tau_{x\varphi} \\ \tau_{xz} &= Q\tau_{xz} \\ \tau_{\varphi z} &= R\tau_{\varphi z} \end{aligned} \right\} [2]$$

Ahora bien: las hipótesis fundamentales de la teoría de láminas permiten suponer $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{\varphi z} = 0$ y $M=N=P=H=L=0$, quedando, por tanto, el sistema anterior en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= A\varepsilon_x + B\varepsilon_\varphi \\ \sigma_\varphi &= C\varepsilon_x + D\varepsilon_\varphi \\ \tau_{x\varphi} &= G\tau_{x\varphi} \end{aligned} \right\} [3]$$

Con cinco constantes a determinar. Este sistema se puede poner en la forma:



$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_\varphi} (\varepsilon_x + \nu_\varphi \varepsilon_\varphi) \\ \sigma_\varphi &= \frac{E_\varphi}{1-\nu_x\nu_\varphi} (\varepsilon_\varphi + \nu_x \varepsilon_x) \\ \tau_{x\varphi} &= G \tau_{x\varphi} \end{aligned} \right\} [4]$$

En cuyas expresiones figuran dos módulos de elasticidad, E_x y E_φ ; un módulo de rigidez, G , y dos coeficientes de POISSON, ν_x y ν_φ , de los cuales ν_x representa la relación $\varepsilon_\varphi : \varepsilon_x$ para $\sigma_\varphi=0$, y ν_φ la relación $\varepsilon_x : \varepsilon_\varphi$ para $\sigma_x=0$, todas cuyas constantes se calculan aplicando esfuerzos y midiendo deformaciones, como se expone a continuación:

Sea S la sección de la barra elemental, I su momento de inercia respecto a la superficie media de la lámina, l el lado del triángulo elemental y E el módulo de elasticidad del material del que están constituidos los elementos de la retícula, que se supone acero ordinario de construcción.

Si el rombo elemental $A B C D$ (fig. 16) se le supone aplicado una fuerza de compresión P en la dirección de la diagonal $A C$, esta fuerza P se descompone en dos, dirigidas según las barras $A B$ y $A D$, cuya magnitud, igual para ambas, es:

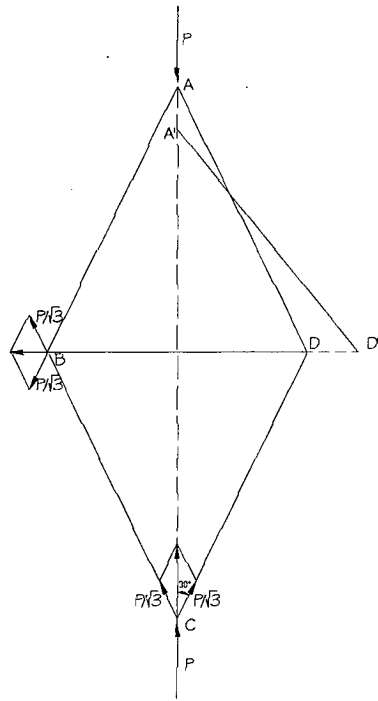


Figura 16.

$$\frac{P}{2 \cos 30^\circ} = \frac{P}{\sqrt{3}},$$

que provocan en las mismas unos acortamientos de magnitud:

$$\frac{P.l}{\sqrt{3}.E.S}$$

A consecuencia de las compresiones que se han presentado en los cuatro lados del rombo, su diagonal B D está solicitada por un esfuerzo de tracción cuyo valor es:

$$\frac{P}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cos 60^\circ = \frac{P}{\sqrt{3}},$$

que produce en dicha barra un alargamiento también igual a:

$$\frac{P.l}{\sqrt{3}.E.S}$$

El acortamiento total de la diagonal AC será dos veces la magnitud $\overline{AA'}$, que se puede determinar, mediante relaciones geométricas, de la figura 15.

$$\begin{aligned}\overline{DD'} &= \frac{Pl}{2\sqrt{3}ES} & \overline{OD'} &= \frac{l}{2} + \frac{Pl}{2\sqrt{3}ES}, \\ \overline{AO} &= \frac{\sqrt{3}}{2}l & \overline{A'D'} &= l - \frac{Pl}{\sqrt{3}ES}, \\ \overline{OA'}^2 &= \overline{A'D'}^2 - \overline{OD'}^2 = \frac{3l^2}{4} + \frac{P^2l^2}{4E^2S^2} - \frac{5Pl^2}{2\sqrt{3}ES}, \\ \overline{OA'}^2 &= (\overline{OA} - \overline{AA'})^2 = \frac{3l^2}{4} + \overline{AA'}^2 - \sqrt{3}l\overline{AA'}, \\ \overline{AA'}^2 - \sqrt{3}l\overline{AA'} + \frac{5Pl^2}{2\sqrt{3}ES} - \frac{P^2l^2}{4E^2S^2} &= 0, \\ \overline{AA'} &= \frac{\sqrt{3}}{2}l \left[1 - \sqrt{1 + \frac{P^2}{3E^2S^2} - \frac{10P}{3\sqrt{3}ES}} \right].\end{aligned}$$

Si se desarrolla en serie y se desprecian las potencias de los corrimientos iguales o mayores de la segunda, se tiene:

$$\overline{AA'} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}l \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{10P}{\sqrt{3}ES} \right] = \frac{5}{6} \frac{Pl}{ES}.$$

Las deformaciones serán, pues:

$$\epsilon_x = \frac{\overline{DD'}}{\overline{OD}} = \frac{Pl}{2\sqrt{3}ES} : \frac{l}{2} = \frac{P}{\sqrt{3}ES},$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} = \frac{5P.l}{6E.S} : \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{5P}{3\sqrt{3}E.S},$$

y por lo tanto:

$$E_{\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi}}{\varepsilon_{\varphi}} = \frac{P}{\sqrt{3}.S} : \frac{5P}{3\sqrt{3}E.S} = \frac{3}{5} E, \quad [5]$$

puesto que la sección resistente eficaz normal a P es: $2 S \cos 30^{\circ} = S \sqrt{3}$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_{\varphi}} = \frac{P}{\sqrt{3}.E.S} : \frac{5P}{3\sqrt{3}E.S} = \frac{3}{5}. \quad [6]$$

Antes de seguir conviene estudiar este valor del coeficiente de POISSON. Se sabe que un cuerpo continuo e isótropo las leyes de elasticidad del paralelepípedo elemental conducen a un valor de $\nu < 1/2$, a fin de que no sea negativo el módulo de expansión de volumen. Choca, por tanto, encontrarse con un valor de ν mayor de 0.5. Basta, para aclarar esto; volver la atención a las características de anisotropía del cuerpo estudiado, pudiendo comprobarse fácilmente que también en este caso, con los valores que se están obteniendo, resulta positivo el citado módulo de expansión de volumen.

Si ahora se supone el rombo elemental A B C D sometido a una compresión P dirigida según la diagonal B D, sólo la barra dispuesta según dicha diagonal ha de resistir a esta sollicitación, puesto que las restantes barras, conservando la libertad de modificar su inclinación relativa, no intervendrán en esta función resistente. La sección eficaz es, pues, S y la diagonal B D sufrirá un acortamiento total del valor:

$$\frac{P.l}{E.S}.$$

Análogamente al caso anterior, la diagonal A C sufrirá un alargamiento igual

a:

$$\frac{Pl}{\sqrt{3}ES}$$

Siendo, por tanto, las deformaciones:

$$\varepsilon_x = \frac{Pl}{ES} : l = \frac{P}{ES}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{Pl}{\sqrt{3}ES} : \sqrt{3}l = \frac{P}{3ES}$$

y el módulo E_x será:

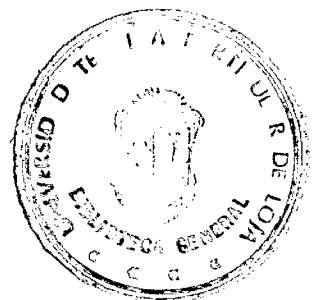
$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{P}{S} : \frac{P}{ES} = E, \quad [7]$$

y por último:

$$\nu_x = \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_x} = \frac{P}{3ES} : \frac{P}{ES} = \frac{1}{3}. \quad [8]$$

Resta por calcular el valor del módulo de rigidez que figura en la tercera de las ecuaciones [4]. Para ello se considerará el rombo elemental A B C D, al que se aplican dos pares en equilibrio de valor $P \neq \sqrt{3}$ (fig. 17). La sección eficaz que ha de resistir una cualquiera de las fuerzas P/l , aplicadas en los nudos A y C, es:

$$2.S.\cos 60^\circ = S,$$



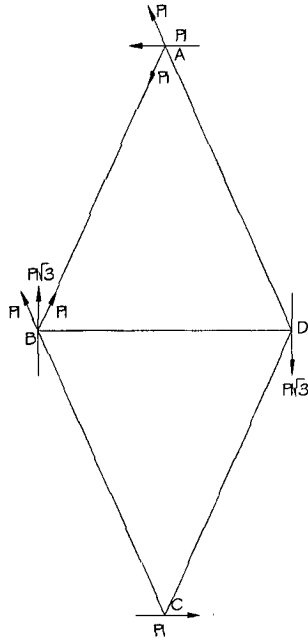


Figura 17.

y la que ha de resistir las fuerzas $P/\sqrt{3}$, aplicadas en los nudos B y D, será:

$$2S \cos 60^\circ = S\sqrt{3}$$

lo que da siempre una tensión cortante:

$$\tau_{x\varphi} = \frac{Pl\sqrt{3}}{S\sqrt{3}} = \frac{Pl}{S}$$

Para obtener el valor del deslizamiento $\gamma_{\varphi x}$, hay que tener en cuenta que las fuerzas tangenciales que actúan en los vértices se descomponen según unas compresiones en las barras A B y D C, y tracciones en las barras A D y B C.

Estas compresiones y tracciones tienen, como era de esperar, el mismo valor:

$$\frac{P.l}{2\cos 60^\circ} = \frac{P.l\sqrt{3}}{2\cos 30^\circ} = P.l;$$

por lo tanto, las barras A B y C D sufrirán un acortamiento total:

$$\Delta = \frac{P.l}{ES} . l = \frac{P.l^2}{ES},$$

y las barras A C y B C un alargamiento de la misma magnitud. La combinación de alargamientos y acortamientos da lugar a una variación del ángulo recto que forman las diagonales del rombo, y que se estudiará con el auxilio de la figura 18.

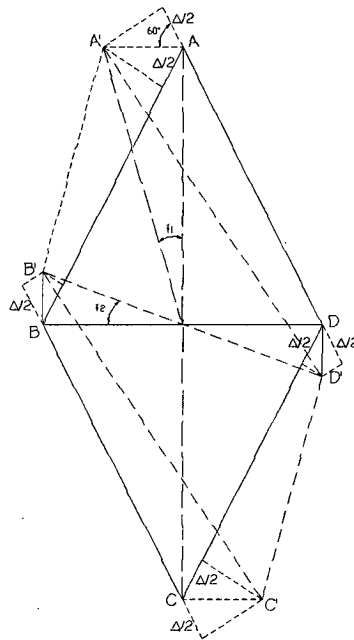


Figura 18.

El rombo elemental A B C D tomará, al deformarse, la posición A' B' C' D', y con la notación de la figura 18, el valor del deslizamiento será:

$$\gamma_{\varphi x} = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$$\gamma_1 \approx \frac{AA'}{AO} = \frac{\frac{\Delta}{2} : \cos 60^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{\Delta}{l\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ} = \frac{2\Delta}{l\sqrt{3}},$$

$$\gamma_2 \approx \frac{BB'}{OB'} = \frac{\frac{\Delta}{2} : \cos 30^\circ}{\frac{1}{2}} = \frac{2\Delta}{2l \cdot \cos 30^\circ} = \frac{2\Delta}{l\sqrt{3}},$$

$$\gamma_{\varphi x} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{4}{l\sqrt{3}} \Delta = \frac{4}{l\sqrt{3}} \cdot \frac{Pl^2}{ES} = \frac{4Pl}{\sqrt{3}ES}$$

Conocidos los valores de $\tau_{\varphi x}$ y $\gamma_{\varphi x}$, el valor de G será:

$$G = \frac{\tau_{\varphi x}}{\gamma_{\varphi x}} = \frac{\frac{Pl}{S}}{\frac{4Pl}{\sqrt{3}ES}} = \frac{\sqrt{3}}{4} E. \quad [9]$$

Con los valores de los coeficientes de elasticidad E_x , E_φ , del módulo de rigidez G y de los coeficientes de POISSON ν_x y ν_φ , dados por las expresiones [5], [6], [7], [8] y [9], el sistema [4] puede ponerse en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{5}{4} E \left(\varepsilon_x + \frac{3}{5} \varepsilon_\varphi \right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{3}{4} E \left(\varepsilon_\varphi + \frac{1}{3} \varepsilon_x \right) \\ \tau_{\varphi x} &= \frac{E\sqrt{3}}{4} \tau_{x\varphi} \end{aligned} \right\} \quad [10]$$

Las relaciones que ligam las deformaciones con los corrimientos u , v y w de la superficie media ⁽¹⁾ son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \chi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\xi}{r(r+\xi)} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{r+\xi},$$

$$\gamma_{x\varphi} = \frac{1}{r+\xi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left(1 + \frac{\xi}{r}\right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \left(\frac{\xi}{r} + \frac{\xi}{r+\xi}\right).$$

Si en estas expresiones se desarrolla $1/(r+\xi)$ en serie y se desprecian las potencias de ξ/r mayores de la primera, se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \xi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\xi}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\xi}{r^2}\right) w,$$

$$\gamma_{x\varphi} = \left(\frac{1}{r} - \frac{\xi}{r^2}\right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left(1 + \frac{\xi}{r}\right) \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\xi}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}.$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones [10], se tiene:

$$\sigma_x = \frac{5E}{4} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{5} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{3}{5} \frac{1}{r} w - \xi \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{5} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{3}{5} \frac{1}{r^2} w \right) \right],$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{3E}{4} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} w - \xi \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} w \right) \right],$$

$$\tau_{x\varphi} = \frac{E\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} - \xi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \right]$$

Para simplificar las expresiones que vienen a continuación se utilizará en lo que sigue la notación siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = f'; \quad \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = f'' \dots$$

$$r \frac{\partial}{\partial x} = f'; \quad r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = f'' \dots$$

Con esta notación las expresiones de las tensiones en función de los

corrimientos toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{5E}{4r} \left[u' + \frac{3}{5} (v' + w) - \frac{z}{r} \left(w' + \frac{3}{5} (w + w'') \right) \right] \\ \sigma_\varphi &= \frac{3E}{4r} \left[w + v' + \frac{1}{3} u' - \frac{z}{r} \left(w + w'' + \frac{1}{3} w''' \right) \right] \\ \sigma_x &= \frac{E\sqrt{3}}{4r} \left[u' + v' - \frac{z}{r} (u' - v' + 2w'') \right] \end{aligned} \right\} [11]$$

Falta ahora pasar de las tensiones a los esfuerzos y momentos unitarios. En la lámina triangulada la anchura real de la lámina correspondiente a la longitud unidad es variable con la ordenada z ; si este ancho se representa por $(\text{ancho})_z$, las expresiones de los esfuerzos serán las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= + \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x [\text{ancho}]_z \cdot dz \\ N_\varphi &= + \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi [\text{ancho}]_z \cdot dz \\ N_{\varphi x} &= + \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{x\varphi} [\text{ancho}]_z \cdot dz \end{aligned} \right\} [12]$$

Siendo δ el espesor de la lámina. Las expresiones de los momentos unitarios son:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x [\text{ancho}]_z \cdot z \cdot dz \\ M_\varphi &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi [\text{ancho}]_z \cdot z \cdot dz \\ M_{\varphi x} &= - \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{x\varphi} [\text{ancho}]_z \cdot z \cdot dz \end{aligned} \right\} [13]$$

En las seis expresiones anteriores hay que introducir las de σ_x , σ_ϕ , $\tau_{x\phi}$, dadas por [11]. Como los recorridos de la superficie media, u , v y w , son independientes de z , salen fuera del signo integral y tan sólo quedarán por obtener los valores de las tres integrales siguientes:

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} [ancho]_z \cdot dz; \quad \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} [ancho]_z \cdot z \cdot dz; \quad \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} [ancho]_z \cdot z^2 \cdot dz$$

de las cuales la primera representa la sección total resistente en la longitud unidad, y la tercera es el momento de inercia de dicha sección respecto a su intersección con la superficie media. Si se supone que el perfil utilizado es simétrico respecto a su intersección con la superficie media, la segunda integral será cero.

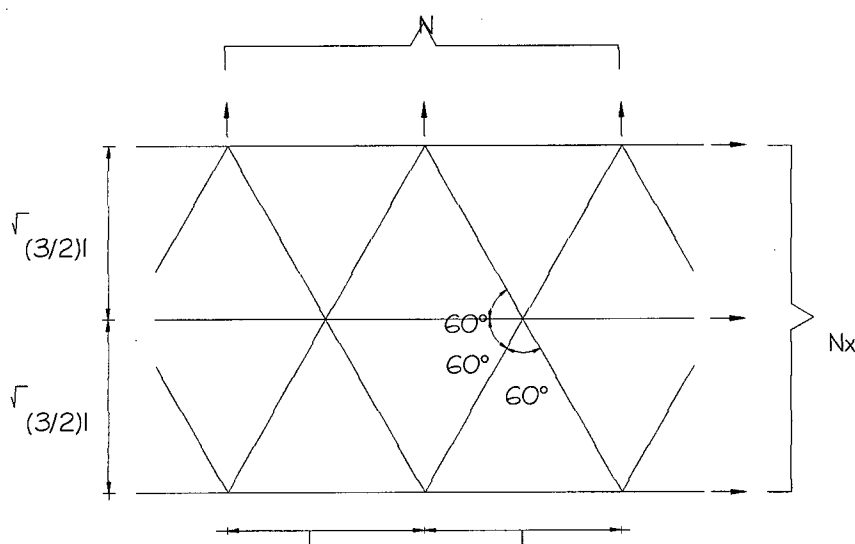


Figura 19.

Observando la figura 19, y mediante sencillos cálculos, se deduce que las secciones unitarias buscadas son:

$$\frac{2S}{l\sqrt{3}} \dots \text{para los esfuerzos } N_x;$$

$$\frac{S\sqrt{3}}{l} \dots \text{para los esfuerzos } N_\varphi;$$

$$\frac{S}{l} \dots \text{para los esfuerzos } N_{\varphi x},$$

y análogamente, los momentos de inercia unitarios serán:

$$\frac{2I}{l\sqrt{3}} \dots \text{para el momento } M_x;$$

$$\frac{I\sqrt{3}}{l} \dots \text{para el momento } M_\varphi;$$

$$\frac{I}{l} \dots \text{para el momento } M_{\varphi x};$$

Con los valores anteriores la integración de las expresiones [12] y [13] da:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{2.ES}{4\sqrt{3}.lr} [5u' + 3v' + 3w] \\ N_\varphi &= \frac{3.ES}{4\sqrt{3}.lr} [u' + 3v' + 3w] \\ N_{\varphi x} &= \frac{3.ES}{4\sqrt{3}.lr} [u' + v'] \\ M_x &= \frac{2.EI}{4\sqrt{3}.lr^2} [3w + 3w'' + 5w'''] \\ M_\varphi &= \frac{3.EI}{4\sqrt{3}.lr^2} [3w + 3w'' + w'''] \\ M_{\varphi x} &= \frac{3.EI}{4\sqrt{3}.lr^2} [u' - v' + 2w'''] \end{aligned} \right\} [14]$$

El conjunto de ecuaciones [1] y [14] resuelve el problema, ya que

introduciendo los valores dados por [14] en las tres primeras expresiones [1], se obtiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales en u , v y w , de las cuales, por eliminación de u y v , se deduce una ecuación diferencial de octavo grado en w que se puede integrar.

Para facilitar la notación se hace $(I/S r^2) = \beta$, y siguiendo el proceso indicado, se tiene sucesivamente:

$$\left. \begin{aligned} 10u'' + 3u'' + 9v' + 6w' &= 0 \\ u' (2 - \beta) + 3v'' + v'' (1 + \beta) + 3w' - \beta (3w'' + 3w'' + 3w') &= 0 \\ 6\beta u'' - 6\beta v'' + 3u' + 9v' + 9w + \beta [9w'' + 21w'' + 10w'' + 9w' + 6w''] &= 0 \end{aligned} \right\} [15]$$

$$\left. \begin{aligned} 10u'' + 3u'' + 9v' + 6w' &= 0 \\ -9u'' - 10(1 + \beta)u'' - 3(5 + 4\beta)u'' - 27\beta w'' - 27\beta w'' + 9(1 - 3\beta)w' - 6(1 + \beta)w'' &= 0 \quad [16] \\ 24\beta u'' + 20\beta u'' - 21u'' - 9u'' + 9w' + 27\beta w'' + 63\beta w'' + 30\beta w'' + 27\beta w' + 30w'' &= 0 \\ -216\beta u'' - 240\beta(1 + \beta)u'' - 72\beta(5 + 4\beta)u'' - 648\beta^2 w'' - 648\beta^2 w'' + \\ + 216\beta(1 - 3\beta)w'' - 144\beta(1 + \beta)w'' - 180\beta u'' - 200\beta(1 + \beta)u'' - 60\beta(5 + 4\beta)u'' - \\ - 540\beta^2 w'' - 540\beta^2 w'' + 180\beta(1 - 3\beta)w'' - 120\beta(1 + \beta)w'' + 189u'' + \\ + 210(1 + \beta)u'' + 63(5 + 4\beta)u'' + 567\beta w'' + 567\beta w'' - 189(1 - 3\beta)w'' + \\ + 126(1 + \beta)w'' + 81u'' + 90(1 + \beta)u'' + 27(5 + 4\beta)u'' + 243\beta w'' + 243\beta w'' - \\ - 81(1 - 3\beta)w'' + 54(1 + \beta)w'' + 216\beta u'' + 180\beta u'' - 189u'' - 81u'' + 81w'' + \\ + 243\beta w'' + 567\beta w'' + 270\beta w'' + 243\beta w'' + 270\beta w'' + 240\beta(1 + \beta)u'' + \\ + 200\beta(1 + \beta)u'' - 210(1 + \beta)u'' - 90(1 + \beta)u'' + 90(1 + \beta)w'' + 270\beta(1 + \beta)w'' + \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + 630\beta(1+\beta)w^{(8)} + 300\beta(1+\beta)w^{(7)} + 270\beta(1+\beta)w^{(6)} + 300\beta(1+\beta)w^{(5)} + \\
& + 72\beta(5+4\beta)w^{(4)} + 60\beta(5+4\beta)w^{(3)} - 63(5+4\beta)w^{(2)} - 27(5+4\beta)w^{(1)} + \\
& + 27(5+4\beta)w^{(0)} + 81\beta(5+4\beta)w^{(4)} + 189\beta(5+4\beta)w^{(3)} + 90\beta(5+4\beta)w^{(2)} + \\
& + 81\beta(5+4\beta)w^{(1)} + 90\beta(5+4\beta)w^{(0)} = 0
\end{aligned}$$

Simplificando se tiene la ecuación diferencial de octavo orden, en w , siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
& w^{(8)} + \frac{4}{3}(3-\beta)w^{(7)} + 2w^{(6)} + \frac{1}{9}(55-6\beta)w^{(5)} + \frac{1}{3}(21-4\beta)w^{(4)} + w^{(3)} + \\
& + \frac{10}{27}(12+5\beta)w^{(2)} + \frac{1}{9}(49-2\beta)w^{(1)} + 3w^{(0)} + \frac{100}{81}(1+\beta)w^{(4)} + \\
& + \frac{20}{27}(1+\beta)w^{(3)} + \frac{8}{9\beta}(1+\beta)w^{(2)} = 0
\end{aligned} \right\} \quad [17]$$

Esta ecuación se satisface haciendo:

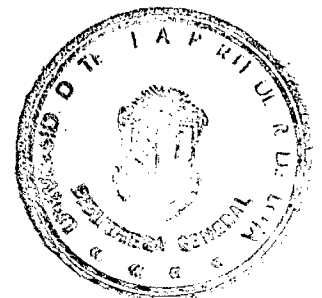
$$w = \sum e^{m\varphi} \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r} \quad [18]$$

siendo:

$$\alpha = \frac{n\pi.r}{L}$$

L es la longitud de la lámina y n un número entero, cuyo valor vendrá fijado por el término del desarrollo en serie de las cargas exteriores, como se verá en las páginas siguientes.

La ecuación característica que resuelve el problema es:



$$m^8 + \left[2 - \frac{4}{3}(3 - \beta)\alpha^2 \right] m^6 + \left[1 - \frac{\alpha^2}{3}(21 - 4\beta) + \frac{\alpha^4}{9}(55 - 6\beta) \right] m^4 + \left[-3\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{9}(49 - 2\beta) - \frac{10}{27}\alpha^6(12 + 5\beta) \right] m^2 + \alpha^4(1 + \beta) \left[\frac{8}{9\beta} - \frac{20}{27}\alpha^2 + \frac{100}{81}\alpha^4 \right] = 0$$

[19]

Una vez resuelta esta ecuación, se obtendrá el valor del corrimiento w , y mediante las ecuaciones [16] los otros dos corrimientos u y v , y, por último, sustituyendo en el sistema [14] y en las dos últimas del sistema [1], tendremos todos los esfuerzos y momentos unitarios del sistema homogéneo, al que se deberá superponer el efecto membrana que se estudia a continuación.

Antes de pasar a estudiar este estado membrana, hay que hacer constar que la ecuación [19] tiene una forma análoga a la que se obtiene para la lámina continua, si bien los coeficientes son más complejos que en aquella. En la ecuación [19] no intervienen más que las dimensiones de la lámina, r y L , y las características del perfil adoptado, S e I , siendo independiente de las dimensiones de la retícula. Esta circunstancia simplifica notablemente los trabajos de tanteo, pues elegido *a priori* un perfil determinado, aquella permite variar las dimensiones de la retícula para acomodarse a los esfuerzos que se obtengan, sin necesidad de rehacer los cálculos más que en la parte correspondiente al planteamiento de las ecuaciones de borde y a la obtención de los esfuerzos definitivos. Por lo demás, la ecuación [19] puede resolverse por cualquiera de los procedimientos

conocidos, y de ello se tratará en el capítulo siguiente.

ESTADO MEMBRANA.- “Si se supone que las cargas exteriores aplicadas en la superficie de la lámina no tienen componente en la dirección de las generatrices y se designan por Z e Y las componentes radial y tangencial de dichas cargas en un elemento de lámina, las ecuaciones de equilibrio serán:

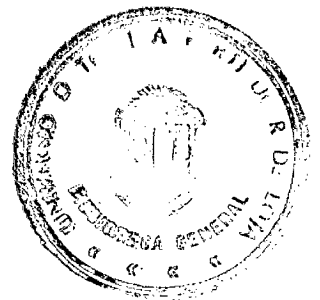
$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} + rZ &= 0 \\ r \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} - rY &= 0 \\ r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [20]$$

Z será positivo cuando actúe hacia abajo, e Y será positivo si actúa según el sentido de avance de las agujas del reloj. El sistema [20] se puede poner en la forma:

$$\begin{aligned} N_{\varphi} &= -rZ \\ \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} &= Y - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial N_x}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Este sistema se puede integrar directamente tomando la forma:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -rZ \\ N_{\varphi x} &= \int \left(Y - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) dx + f_1(\varphi) \\ N_x &= -\int \frac{1}{r} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} dx + f_2(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad [21]$$



Debiendo determinarse las dos funciones $f_1(\varphi)$ y $f_2(\varphi)$ por medio de las condiciones de borde. Estas condiciones hay que imponerlas en los dos bordes $x=0$ y $x=L$, puesto que las funciones f_1 y f_2 son independientes de x .

Las expresiones de los tres esfuerzos que intervienen en el estado membrana en función de los recorridos u , v y w (fórmulas primeras de [14]) serán:

$$N_x = \frac{2ES}{4\sqrt{3}lr} \left[5r \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + 3w \right]$$

$$N_\varphi = \frac{3ES}{4\sqrt{3}lr} \left[r \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + 3w \right]$$

$$N_{\varphi x} = \frac{3ES}{4\sqrt{3}lr} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

De estas tres ecuaciones se pueden obtener los recorridos en función de los esfuerzos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{l}{2\sqrt{3}ES} (3N_x - 2N_\varphi) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{4l}{\sqrt{3}ES} N_{\varphi x} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ w &= \frac{4lr}{3\sqrt{3}ES} N_\varphi - \frac{r}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad [22]$$

Con los sistemas [21] y [22] se pueden obtener los esfuerzos y corrimientos del estado membrana para el estado de cargas dado. En el capítulo siguiente se aplican estas fórmulas a dos tipos de sobrecargas usuales: el peso propio y la

sobrecarga vertical uniformemente distribuida en planta”¹²

6.4. DESARROLLO NUMÉRICO

En lo que sigue se prepararán las fórmulas obtenidas anteriormente para el cálculo numérico.

Todas las fórmulas son utilizables para la retícula equilátera, para la cual se han obtenido los espesores ficticios y coeficientes de POISSON anteriormente determinados. No debe olvidarse que las expresiones obtenidas sólo son válidas para este tipo de retícula. De todas formas las fórmulas que se obtendrían serían más complicadas por entrar en ellas un nuevo parámetro, ya que la magnitud l no bastaría para definir la retícula.

En las expresiones halladas sólo intervienen los cinco parámetros siguientes:

S e I , sección y momento de inercia del perfil laminado, expresados en m^2 y m^4 , magnitudes que, dentro de ciertos límites, pueden considerarse constantes, teniendo en cuenta la discontinuidad de las galgas de laminación.

l , lado de la retícula en m que, según lo indicado en el capítulo anterior, sólo intervendrá al final del cálculo en el planteamiento de las ecuaciones de borde y en la obtención de los esfuerzos que actúan sobre las barras de la retícula.

¹² POZO VINDEL, Florencio J. Del. ESTUDIO DE CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS RIGIDIZADAS. Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento. Madrid-España. 1990.

L y r , dimensiones fundamentales de la lámina, que, a través de los desarrollos en serie trigonométrica, intervienen en todo el proceso de cálculo. Estas magnitudes vendrán expresadas en m.

Este tipo de láminas tiene su principal aplicación en grandes naves de carácter industrial y, en general, se presentarán como láminas aisladas o bien en láminas múltiples unidas por los bordes $\varphi = \text{const.}$

La carga principal por considerar será la del peso propio, para la que se obtendrá en lo que sigue la integral particular representada por el estado membrana. A cargas de este tipo se pueden reducir no sólo el peso de la lámina propiamente dicha, sino también el de la superestructura de la cubierta. Además de estas cargas, habrá que tener en cuenta las sobrecargas de nieve y viento.

La sobrecarga de nieve suele considerarse en todos los reglamentos como uniformemente repartida sobre la proyección en planta de la cubierta. En las láminas polilobuladas, sin embargo, esta hipótesis no es aplicable, ya que se producirían acumulaciones en las gaviotas. Esto autoriza a utilizar una ley de repartición uniforme a lo largo de la directriz, que equivale a una ley de la forma:

$$\frac{P_n}{\cos(\phi_k - \varphi)}$$

por unidad de longitud en planta; ϕ_k es el ángulo de abertura de la lámina medido

desde el borde a la vertical. La ley citada supone una acumulación de nieve en el borde longitudinal igual a vez y media la depositada en clave para un semiángulo de abertura igual a 45° y doble para un semiángulo de 60° , tendiendo a hacerse infinita para láminas de medio punto, que no suelen utilizarse salvo en rarísimos casos. FINSTENWALDER y JAKOBSEN, entre otros, utilizan también esta hipótesis de reparto de nieve en sus estudios sobre láminas cilíndricas.

En el caso de láminas aisladas esta hipótesis de reparto es muy desfavorable y es conveniente utilizar la de reparto uniforme en planta, cuya correspondiente integral particular se dará en las páginas siguientes.

En cuanto a la sobrecarga debido al viento, se puede prescindir de ella para láminas cuyo semiángulo de abertura sea igual o menor de 50° , como es el caso general. Los reglamentos modernos admiten que en la cubierta cilíndrica de directriz circular el viento provoca succiones en toda la zona de sotavento y en un sector de unos 50° , contados a partir de la clave, de la zona de barlovento. Únicamente habrá que prever presiones en el resto de la zona de barlovento cuando el semiángulo de abertura de la lámina sea superior a 50° , caso que se presentará pocas veces en la práctica.

Las succiones originan un alivio en el régimen general de tensiones de la lámina y, por esta razón, no se tomarán en consideración. Habrá que tenerlo en cuenta, en cambio, al proyectar el anclaje de la lámina ante posibles levantamientos por

eventuales presiones interiores del viento.

Los razonamientos anteriores se refieren al caso de edificaciones aisladas en las que el viento puede suponerse prácticamente horizontal. En cubiertas rodeadas por otros edificios, la acción del viento puede ser mucho más compleja por las desviaciones y remolinos originados por los obstáculos en la corriente principal. Estos casos deben ser estudiados de un modo particular para obtener una ley de reparto de presiones que, reflejando con suficiente aproximación las acciones posibles más desfavorables, permita una fácil deducción de la integral particular correspondiente. Para estos casos, y como se verá más adelante, la solución del sistema homogéneo está estudiada para una carga simétrica y una antisimétrica, siendo posible, mediante la combinación de ambas, obtener la solución correspondiente a una carga cualquiera.

6.4.1 ESTADO MEMBRANA

El problema anteriormente tratado en el sistema homogéneo, referente a establecer las relaciones que ligan los esfuerzos con las deformaciones y corrimientos, produciéndose la hiperestaticidad interna de la lámina, la cual lo superamos mediante el empleo de las ecuaciones de la elasticidad, teniendo en cuenta las deformaciones.

El problema de determinación del estado membrana, podemos solucionarlo



de una manera más general, suponiendo que debido a la acción de fuerzas exteriores, se originan en las secciones del elemento diferencial que representa al punto, un estado de tensiones normales y tangenciales, y que estas tensiones varían de una sección a otra, de acuerdo a los términos de la serie de Taylor.

El estado mϕembrana, se basa en considerar a la lámina capaz de resistir solamente fuerzas de sección normales y tangenciales, y sin resistencia de sollicitaciones de flexión.

Peso propio.- Para este tipo de carga las expresiones de Z e Y serán:

$$Y = p \cdot \text{Sen}(\phi_k - \varphi) \qquad Z = p \cdot \text{Cos}(\phi_k - \varphi)$$

Antes de sustituir los valores anteriores de Y y Z en las expresiones [21] es conveniente desarrollar en serie de FOURIER las cargas anteriores a lo largo de la generatriz:

$$Y = \frac{4p}{\pi} \left[\text{Sen} \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \text{Sen} \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \text{Sen} \frac{5\pi x}{L} + \dots \right] \text{Sen}(\phi_k - \varphi)$$

$$Z = \frac{4p}{\pi} \left[\text{Sen} \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \text{Sen} \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \text{Sen} \frac{5\pi x}{L} + \dots \right] \text{Cos}(\phi_k - \varphi)$$

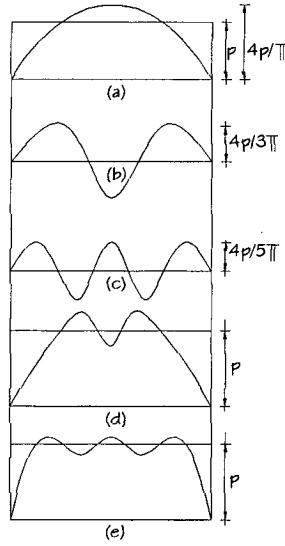


Figura 20.

En general bastará considerar únicamente los dos primeros términos (fig. 20); no obstante, el cálculo se desarrollará para un término general:

$$Y = \frac{4p}{\pi n} \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r} \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi),$$

$$Z = \frac{4p}{\pi n} \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r} \operatorname{Cos}(\phi_k - \varphi).$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones [21], se tiene:

$$N_\varphi = -\frac{4p}{\pi n} r \operatorname{Cos}(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r},$$

$$N_{\varphi x} = -8p \frac{L}{\pi^2 n^2} \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi) \operatorname{Cos} \alpha \frac{x}{r} + f_1(\varphi),$$

$$N_x = -8p \frac{L^2}{\pi^3 n^3} \operatorname{Cos}(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r} - \frac{x}{r} f_1(\varphi) + f_2(\varphi).$$

Para determinar las funciones $f_1(\varphi)$ y $f_2(\varphi)$ se puede suponer que la lámina está simplemente apoyada en las directrices extremas, lo que concuerda bastante con la realidad. En este caso, $N_x=0$ para $x=0$, y $x=L$ y $N_{\varphi x}=0$ para $x=L/2$.

Por lo tanto:

$$f_1(\varphi) = 0 \qquad f_2(\varphi) = 0,$$

con lo que los esfuerzos tienen las expresiones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -4p \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha} \cos(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \\ N_{\varphi x} &= -8p \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha^2} \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi) \cos \alpha \frac{x}{r}, \\ N_x &= -8p \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha^3} \cos(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}. \end{aligned} \right\} [23]$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones [22], y efectuando operaciones, se tienen los corrimientos:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{4pl}{\sqrt{3}ES} \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{3}{\alpha^2} - 1 \right] \cos(\phi_k - \varphi) \cos \alpha \frac{x}{r}, \\ v &= -\frac{4pl}{\sqrt{3}ES} \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha^3} \left[7 + \frac{3}{\alpha^2} \right] \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \\ w &= -\frac{4pl}{\sqrt{3}ES} \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{5}{3} + \frac{6}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^4} \right] \cos(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \end{aligned} \right\} [24]$$

Las ecuaciones [23] y [24] dan los esfuerzos y corrimientos del estado membrana para una carga de peso propio (p , Kg. por m.²) o cualquier otra que se le pueda asimilar.

6.4.2. CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA EN PLANTA.

Para este tipo de sobrecarga las expresiones de Z e Y serán:

$$Y = q \cos(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi),$$

$$Z = q' \cos^2(\phi_k - \varphi)$$

Y análogamente a lo que se ha visto en el caso anterior, un término general de su desarrollo en serie FOURIER será:

$$Y = \frac{4q}{\pi n} \cos(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}.$$

$$Z = \frac{4q}{\pi n} \cos^2(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}.$$

Sustituyendo en las expresiones [21] y supuesta la sustentación de la lámina igual que en el caso anterior, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -4q \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha} \cos^2(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \\ N_{\varphi x} &= -4q \frac{r^2}{L} \frac{3}{\alpha^2} \cos(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi) \cos \alpha \frac{x}{r}, \\ N_x &= -4q \frac{r^2}{L} \frac{3}{\alpha^3} [\cos^2(\phi_k - \varphi) - \operatorname{Sen}^2(\phi_k - \varphi)] \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}. \end{aligned} \right\} [25]$$

Sustituyendo los valores anteriores en las expresiones [22], se tiene:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{2q.l}{\sqrt{3}ES} \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha^2} \left[\left(\frac{9}{\alpha^2} - 2 \right) \cos^2(\phi_k - \varphi) - \frac{9}{\alpha^2} \operatorname{Sen}^2(\phi_k - \varphi) \right] \cos \alpha \frac{x}{r}, \\ v &= -\frac{8q.l}{\sqrt{3}ES} \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha^3} \left[\frac{9}{\alpha^2} + 5 \right] \operatorname{Sen}(\phi_k - \varphi) \cos(\phi_k - \varphi) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \\ w &= -\frac{2q.l}{\sqrt{3}ES} \frac{r^2}{L} \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{10}{3} + \frac{17}{\alpha^2} + \frac{36}{\alpha^4} \right) \cos^2(\phi_k - \varphi) - \left(\frac{17}{\alpha^2} + \frac{36}{\alpha^4} \right) \operatorname{Sen}^2(\phi_k - \varphi) \right] \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \end{aligned} \right\} [26]$$

Las expresiones [25] y [26] dan los esfuerzos y corrimientos del estado membrana para una sobrecarga uniformemente repartida en planta (q , Kg. por m.² de proyección en planta).

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE OCTAVO GRADO.

Se ha llegado a la siguiente ecuación de octavo grado (ver [19]):

$$m^8 + \left[2 - \frac{4}{3}(3 - \beta)\alpha^2 \right] m^6 + \left[1 - \frac{\alpha^2}{3}(21 - 4\beta) + \frac{\alpha^4}{9}(55 - 6\beta) \right] m^4 + \left[-3\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{9}(49 - 2\beta) - \frac{10}{27}\alpha^6(12 + 5\beta) \right] m^2 + \alpha^4(1 + \beta) \left[\frac{8}{9\beta} - \frac{20}{27}\alpha^2 + \frac{100}{81}\alpha^4 \right] = 0$$

Haciendo $m^2 = t$, se tiene la ecuación de cuarto grado:

$$t^4 + c_6 t^3 + c_4 t^2 + c_2 t + c_0 = 0 \quad [27]$$

Dada la gran importancia del término independiente en relación a los demás coeficientes, una primera aproximación sería tomar como raíces del polinomio de octavo grado los valores $m = \varepsilon \sqrt[8]{c_0}$, siendo ε las raíces octavas de la unidad negativa, por ser c_0 siempre positivo.

Sin embargo, esta aproximación da errores apreciables en casi todos los casos, resultando inadmisibles para valores de $(r/L) < 0.3$.

El siguiente método de resolución, aunque aproximado, produce errores

menores que los que se cometen al introducir en $\beta = I/Sr^2$ los valores de I y S tomados de los manuales, que, por otra parte, no admiten mayor aproximación.

Supuesto igualado el polinomio de cuarto grado al producto de dos de segundo:

$$t^4 + c_6 t^3 + c_4 t^2 + c_2 t + c_0 = (t^2 + h_1 t + g_1)(t^2 + h_2 t + g_2)$$

e identificando los coeficientes, queda el siguiente sistema:

$$h_1 + h_2 = c_6 \quad [28]$$

$$h_1 \cdot h_2 + g_1 + g_2 = c_4 \quad [29]$$

$$h_1 \cdot g_2 + g_1 \cdot h_2 = c_2 \quad [30]$$

$$g_1 \cdot g_2 = c_0 \quad [31]$$

Si además se hace:

$$h_1 = h_2 \quad [32]$$

no será posible, en general que se cumplan todas las anteriores ecuaciones simultáneamente, pero siempre se podrá obtener al unir a [32] tres de las ecuaciones [28], [29], [30], [31], un sistema que dé unos valores de h_1, h_2, g_1, g_2 tales que los dos polinomios de segundo grado equivalgan a uno de cuarto idéntico al primitivo, salvo en un coeficiente c' .

Es lógico escoger para coeficiente c' distinto del de la primitiva ecuación c_2 , por su menor importancia al ser coeficiente de t en primer grado.

Resuelto el sistema formado por [28], [29], [31], y [32], se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h_2 = \frac{c_6}{2} \\ g_1 &= \frac{c_4}{2} - \frac{c_6^2}{8} + \sqrt{\left(\frac{c_4 - \frac{c_6^2}{4}}{2} \right)^2 - c_0} \\ g_2 &= \frac{c_4}{2} - \frac{c_6^2}{8} - \sqrt{\left(\frac{c_4 - \frac{c_6^2}{4}}{2} \right)^2 - c_0} \end{aligned} \right\} \quad [33]$$

Con estos valores se obtienen dos ecuaciones de segundo grado, cuya resolución para obtener sus raíces, y de éstas, deshaciendo el cambio $m^2=t$, pasar a las raíces de la de octavo grado, puede seguirse de una forma sistemática sencilla, tal como se verá en el ejemplo que se incluye al final de este trabajo.

En la ecuación de cuarto grado, equivalente al producto de las de segundo grado, el nuevo coeficiente de t es:

$$c'_2 = h_1 g_2 + h_2 g_1 = \frac{c_6}{2} \left(c_4 - \frac{c_6^2}{4} \right)$$

Para estudiar el error cometido al cambiar en la ecuación de cuarto grado el coeficiente c_2 por el c'_2 , se puede prescindir de β , dada su pequeña importancia, y entonces:

$$c_2 = -3\alpha^2 + \frac{49}{9}\alpha^4 - \frac{40}{9}\alpha^6$$

$$c'_2 = -3\alpha^2 + \frac{73}{9}\alpha^4 - \frac{38}{9}\alpha^6$$

Es decir, que si se sustituye en la ecuación [27] un valor de t , deducido de la fórmula indicada, será:

$$t_1^4 + c_6 t_1^3 + c_4 t_1^2 + c_2 t_1 + c_0 + (c_2 - c'_2) t_1 = (c_2 - c'_2) t_1 \neq 0$$

Para el caso $n=1$, es decir, para el primer término de la serie de FOURIER, este valor que se obtiene para el polinomio indica que en la raíz hallada se ha aproximado todo lo posible, ya que el error absoluto cometido en el término independiente al tomar los valores aproximados de S e I supera al error $(c_2 - c'_2) t$, como se ve a continuación.

Sea k el error relativo de $8/9\beta$, parte principal del término independiente.

El error absoluto en c_0 será $k \frac{8}{9\beta} \alpha^4$. Comparando este error con el cometido al variar c_2 en c'_2 , se tiene que para que fuesen iguales tendrían que ser:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{(c_2 - c'_2) t}{k \frac{8}{9\beta} \alpha^4} = \frac{\left(\frac{24}{9} \alpha^4 + \frac{2}{9} \alpha^6 \right) t}{k \frac{8}{9\beta} \alpha^4} = 1$$

El valor de $|t|$ es aproximadamente:

$$|t| = \sqrt[4]{\frac{8}{9\beta} \alpha^4}$$

y sustituyendo, queda:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{\left(\frac{24}{9} \alpha^4 + \frac{2}{9} \alpha^6 \right) \sqrt[4]{\frac{8}{9\beta} \alpha^4}}{k \frac{8}{9\beta} \alpha^4} = \frac{\frac{24}{9} \alpha + \frac{2}{9} \alpha^3}{k \sqrt[4]{\left(\frac{8}{9\beta} \right)^3}} = 1$$

$$k = \frac{\frac{24}{9}\alpha + \frac{2}{9}\alpha^3}{\sqrt[4]{\left(\frac{8}{9\beta}\right)^3}},$$

Obteniéndose siempre, y para los casos más desfavorables, unos valores de k inferiores al 4/1.000 y, en general, mucho menores.

La sustitución efectuada es válida, ya que el error k introducido en la expresión β , al tomar S e I de los manuales, supera siempre el valor anteriormente obtenido.

Para el segundo término, y en el caso más desfavorable, el error aumenta ligeramente, pero el método puede seguir utilizándose por ser menor la influencia en las raíces y la de éstas en el desarrollo general.

En resumen, las cuatro raíces de la ecuación [27] se obtendrán de las dos ecuaciones de segundo grado:

$$t^2 + h_1 t + g_1 = 0;$$

$$t^2 + h_2 t + g_2 = 0$$

teniendo los coeficientes h_1 h_2 y g_1 g_2 los valores dados por las expresiones [33].

Extrayendo la raíz cuadrada de las cuatro raíces halladas se obtendrán las ocho raíces de la ecuación [19], que serán de la norma:

$$m_{1,2,3,4} = \pm a \pm bi;$$



$$m_{5,6,7,8} = \pm c \pm di$$

Sistema homogéneo.- Una vez resuelta la ecuación característica del sistema homogéneo [19], ya se ha visto que sus raíces son de la forma:

$$m_{1,2,3,4} = \pm a \pm bi;$$

$$m_{5,6,7,8} = \pm c \pm di$$

y en función de estos valores, el corrimiento w valdrá:

$$w = \sum_{i=1}^{i=8} A_i e^{m_i \varphi} \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r} = \left[A_1 e^{(a+bi)\varphi} + A_2 e^{(a-bi)\varphi} + A_3 e^{(c+di)\varphi} + A_4 e^{(c-dii)\varphi} + \right. \\ \left. + A_5 e^{-(a+bi)\varphi} + A_6 e^{-(a-bi)\varphi} + A_7 e^{-(c+di)\varphi} + A_8 e^{-(c-dii)\varphi} \right] \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}$$

Si en los cuatro primeros términos de la expresión anterior se cambia la variable φ por w , representando ésta el ángulo medido desde el borde izquierdo y en el sentido de las agujas del reloj (fig. 21), se tiene:

$$\varphi = 2\phi_k - w;$$

$$e^{(a+bi)\varphi} = e^{(a+bi)2\phi_k} \cdot e^{-(a+bi)w}$$

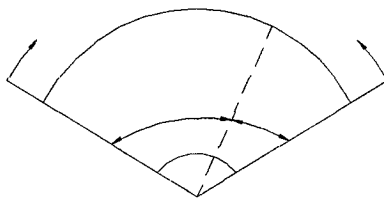


Figura 21.

Si se sustituyen estos valores en la expresión de w , y los factores $e^{(a+bi)2\phi_k}$ y análogos se incluyen en unas nuevas constantes A_9, A_{10}, A_{11} , y A_{12} , se tiene:

$$w = \left[A_5 e^{-(a+bi)\varphi} + A_6 e^{-(a-bi)\varphi} + A_7 e^{-(c+di)\varphi} + A_8 e^{-(c-di)\varphi} + A_9 e^{-(a+bi)\omega} + \right. \\ \left. + A_{10} e^{-(a-bi)\omega} + A_{11} e^{-(c+di)\omega} + A_{12} e^{-(c-di)\omega} \right] \text{Sen} \alpha \frac{x}{r}$$

Expresión que se puede poner, en función de unas nuevas constantes $B_1, B_2, \dots, B_8$, en la forma siguiente:

$$w = \left[e^{-a\varphi} (B_1 \text{Cosh} \varphi + B_2 \text{Sen} b\varphi) + e^{-c\varphi} (B_3 \text{Cos} d\varphi + B_4 \text{Sen} d\varphi) + e^{-a\omega} (B_5 \text{Cos} b\omega + B_6 \text{Sen} b\omega) + \right. \\ \left. + e^{-c\omega} (B_7 \text{Cos} d\omega + B_8 \text{Sen} d\omega) \right] \text{Sen} \alpha \frac{x}{r}$$

Las expresiones $e^{-a\varphi} \cdot \text{Sen} b\varphi$; $e^{-a\varphi} \cdot \text{Cos} b\varphi$; $e^{-c\varphi} \cdot \text{Sen} d\varphi$ y $e^{-c\varphi} \cdot \text{Cos} d\varphi$ representan ondas amortiguadas que miden el efecto de una carga lineal en el borde derecho sobre el resto de la lámina; análogamente, los términos en ω miden el efecto de una carga en el borde izquierdo sobre el resto de la lámina.

Si las cargas en los dos bordes son simétricas (ver fig. 22), el efecto de una carga lineal en el borde derecho debe ser para φ igual al efecto de la misma carga lineal en el borde izquierdo a una distancia $\omega = \varphi$. Por consiguiente, los valores de las constantes serán:

$$B_1 = B_5, \quad B_2 = B_6, \quad B_3 = B_7, \quad B_4 = B_8,$$

y para una carga antisimétrica, es decir, la carga lineal de un borde igual y opuesta a la del otro borde, las constantes tendrán las relaciones siguientes:

$$B_1 = -B_5, \quad B_2 = -B_6, \quad B_3 = -B_7, \quad B_4 = -B_8,$$

y por último, si se hace:

$$\varphi_1 = e^{-a\varphi} \text{Cos}b\varphi \pm e^{-a\omega} \text{Cos}b\omega;$$

$$\varphi_2 = e^{-a\varphi} \text{Sen}b\varphi \pm e^{-a\omega} \text{Sen}b\omega;$$

$$\varphi_3 = e^{-c\varphi} \text{Cos}d\varphi \pm e^{-c\omega} \text{Cos}d\omega;$$

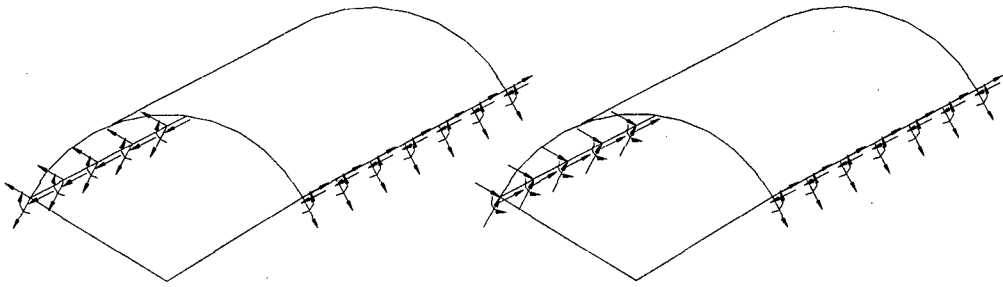
$$\varphi_4 = e^{-c\varphi} \text{Sen}d\varphi \pm e^{-c\omega} \text{Sen}d\omega;$$

$$\varphi_5 = e^{-a\varphi} \text{Cos}b\varphi \mp e^{-a\omega} \text{Cos}b\omega;$$

$$\varphi_6 = e^{-a\varphi} \text{Sen}b\varphi \mp e^{-a\omega} \text{Sen}b\omega;$$

$$\varphi_7 = e^{-c\varphi} \text{Cos}d\varphi \mp e^{-c\omega} \text{Cos}d\omega;$$

$$\varphi_8 = e^{-c\varphi} \text{Sen}d\varphi \mp e^{-c\omega} \text{Sen}d\omega$$



a.)Cargas lineales de borde, simétricas

b.)Cargas lineales de borde, antisimétricas

Figura 22.

En estas expresiones los signos superiores son para carga simétrica, y los inferiores, para carga antisimétrica, y hay que hacer notar que cualquier tipo de carga puede descomponerse en dos: una que dé unas cargas lineales simétricas en los bordes, y otra que las dé antisimétricas.

Con la notación anterior el valor de n será:

$$w = (B_1\phi_1 + B_2\phi_2 + B_3\phi_3 + B_4\phi_4) \text{Sen} \alpha \frac{x}{r}$$

B_1, B_2, B_3 , y B_4 son constantes de integración que se determinarán mediante las condiciones de sustentación en los bordes $\phi = \text{const.}$ Análogamente, las expresiones de los corrimientos u y v serán:

$$\left. \begin{aligned} u &= (D_1\phi_1 + D_2\phi_2 + D_3\phi_3 + D_4\phi_4) \text{Cos} \alpha \frac{x}{r} \\ v &= (C_1\phi_5 + C_2\phi_6 + C_3\phi_7 + C_4\phi_8) \text{Sen} \alpha \frac{x}{r} \end{aligned} \right\} \quad [35]$$

Las constantes C y D se podrán determinar en función de las B mediante las ecuaciones diferenciales [16]. De la tercera ecuación:

$$24\beta u'''' + 20\beta u'''' - 21u'' - 9u' + 9w' + 27\beta w'' + 63\beta w'''' + 30\beta w'''' + 27\beta w'' + 30\beta w'' = 0 \quad [36]$$

se determinarán las constantes D en función de las B . Antes de sustituir los valores de u y w en esta ecuación, es conveniente determinar las derivadas respecto a ϕ de las funciones trigonométrico exponenciales que integran las funciones ϕ :

$$e^{-a\phi} \cdot \text{Cos} b\phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} [e^{-a\phi} \cdot \text{Cos} b\phi] = e^{-a\phi} (-a \text{Cos} b\phi - b \text{Sen} b\phi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} [e^{-a\phi} \cdot \text{Cos} b\phi] = e^{-a\phi} [(a^2 - b^2) \text{Cos} b\phi + 2ab \text{Sen} b\phi],$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \phi^3} [e^{-a\phi} \cdot \text{Cos} b\phi] = e^{-a\phi} [a(-a^2 + 3b^2) \text{Cos} b\phi + b(b^2 - 3a^2) \text{Sen} b\phi],$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \phi^4} [e^{-a\phi} \cdot \text{Cos} b\phi] = e^{-a\phi} [(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) \text{Cos} b\phi + 4ab(a^2 - b^2) \text{Sen} b\phi],$$

$$e^{-a\varphi} \cdot \text{Sen}b\varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [e^{-a\varphi} \cdot \text{Sen}b\varphi] = e^{-a\varphi} (b \text{Cos}b\varphi - a \text{Sen}b\varphi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [e^{-a\varphi} \cdot \text{Sen}b\varphi] = e^{-a\varphi} [-2ab \text{Cos}b\varphi + (a^2 - b^2) \text{Sen}b\varphi]$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} [e^{-a\varphi} \cdot \text{Sen}b\varphi] = e^{-a\varphi} [b(3a^2 - b^2) \text{Cos}b\varphi + a(3b^2 - a^2) \text{Sen}b\varphi]$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} [e^{-a\varphi} \cdot \text{Sen}b\varphi] = e^{-a\varphi} [4ab(b^2 - a^2) \text{Cos}b\varphi + (a^4 + b^4 - 6a^2b^2) \text{Sen}b\varphi]$$

Para establecer las relaciones que ligan las constantes D con las B, sólo se considerarán los dos primeros términos para D₁ y D₂ con B₁ y B₂, ya que las relaciones entre D₃ y D₄ con B₃ y B₄ serán las mismas cambiando *a* por *c* y *b* por *d*.

Sustituyendo en la ecuación [36], se tiene:

$$\begin{aligned} & -24\beta\alpha^2 [D_1\phi_1 + D_2\phi_2] + 20\beta\alpha^4 [D_1\phi_1 + D_2\phi_2] + 21\alpha^2 [D_1\phi_1 + D_2\phi_2] - 9 [D_1\phi_1 + D_2\phi_2] + \\ & + 9\alpha [B_1\phi_1 + B_2\phi_2] + 27\beta\alpha [B_1\phi_1 + B_2\phi_2] - 63\beta\alpha^3 [B_1\phi_1 + B_2\phi_2] + 30\beta\alpha^5 [B_1\phi_1 + B_2\phi_2] + \\ & + 27\beta\alpha [B_1\phi_1 + B_2\phi_2] - 30\beta\alpha^3 [B_1\phi_1 + B_2\phi_2] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -24\beta\alpha^2 [(a^2 - b^2) \text{Cos}b\varphi + 2ab \text{Sen}b\varphi] D_1 + [(a^2 - b^2) \text{Sen}b\varphi - 2ab \text{Cos}b\varphi] D_2 + \\ & + 20\beta\alpha^4 [D_1 \text{Cos}b\varphi + D_2 \text{Sen}b\varphi] + 21\alpha^2 [D_1 \text{Cos}b\varphi + D_2 \text{Sen}b\varphi] - \\ & - 9 [(a^2 - b^2) \text{Cos}b\varphi + 2ab \text{Sen}b\varphi] D_1 + [(a^2 - b^2) \text{Sen}b\varphi - 2ab \text{Cos}b\varphi] D_2 + \\ & + 9\alpha [B_1 \text{Cos}b\varphi + B_2 \text{Sen}b\varphi] + 27\beta\alpha [(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) \text{Cos}b\varphi + 4ab(a^2 - b^2) \text{Sen}b\varphi] B_1 + \\ & + [(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) \text{Sen}b\varphi + 4ab(b^2 - a^2) \text{Cos}b\varphi] B_2 - 63\beta\alpha^3 [(a^2 - b^2) \text{Cos}b\varphi + 2ab \text{Sen}b\varphi] B_1 + \\ & + [(a^2 - b^2) \text{Sen}b\varphi - 2ab \text{Cos}b\varphi] B_2 + 30\beta\alpha^5 [B_1 \text{Cos}b\varphi + B_2 \text{Sen}b\varphi] + 27\beta\alpha [(a^2 - b^2) \text{Cos}b\varphi + 2ab \text{Sen}b\varphi] B_1 + \\ & + [(a^2 - b^2) \text{Sen}b\varphi - 2ab \text{Cos}b\varphi] B_2 - 30\beta\alpha^3 [B_1 \text{Cos}b\varphi + B_2 \text{Sen}b\varphi] \equiv 0 \end{aligned}$$

Como deberá cumplirse para cualquier valor de φ , han de ser nulos los términos en $\cos b$ y $\sin b\varphi$, es decir:

$$\begin{aligned} & D_1 [-24\beta\alpha^2(a^2 - b^2) + 20\beta\alpha + 21\alpha^2 - 9(a^2b^2)] + D_2 [48\beta\alpha^2ab + 18ab] + B_1 [9\alpha + \\ & + 27\beta\alpha(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) - 63\beta\alpha^3(a^2 - b^2) + 30\beta\alpha^5 + 27\beta\alpha(a^2 - b^2) - 30\beta\alpha^3] + \\ & + B_2 [108\beta\alpha ab(b^2 - a^2) + 126\beta\alpha^3ab - 54\beta\alpha ab] = 0 \\ & D_1 [-48\beta\alpha^2ab - 18ab] + D_2 [-24\beta\alpha^2(a^2 - b^2) + 20\beta\alpha^4 + 21\alpha^2 - 9(a^2 - b^2)] + \\ & + B_1 [108\beta\alpha(a^2 - b^2)ab - 126\beta\alpha^3ab + 54\beta\alpha ab] + B_2 [9\alpha + 27\beta\alpha(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) - \\ & - 63\beta\alpha^3(a^2 - b^2) + 30\beta\alpha^5 + 27\beta\alpha(a^2 - b^2) - 30\beta\alpha^3] \end{aligned}$$

Si se hace:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 48\beta\alpha^2ab + 18ab = 6ab(3 + 8\beta\alpha^2) \\ n_1 &= -24\beta\alpha^2(a^2 - b^2) + 20\beta\alpha^4 + 21\alpha^2 - 9(a^2 - b^2) = \alpha^2(21 + 20\beta\alpha^2) - 3(a^2 - b^2)(3 + 8\beta\alpha^2) \\ p_1 &= 108\beta\alpha(a^2 - b^2)ab - 126\beta\alpha^3ab + 54\beta\alpha ab; \\ q_1 &= 9\alpha + 27\beta\alpha(a^4 + b^4 - 6a^2b^2) - 63\beta\alpha^3(a^2 - b^2) + 30\beta\alpha^5 + 27\beta\alpha(a^2 - b^2) - 30\beta\alpha^3, \end{aligned} \right\}$$

[37]

el sistema anterior se convierte en el siguiente:

$$n_1D_1 + m_1D_2 = -q_1B_1 + p_1B_2;$$

$$n_1D_1 - n_1D_2 = p_1B_1 + q_1B_2;$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{p_1m_1 - q_1n_1}{n_1^2 + m_1^2} B_1 + \frac{q_1m_1 + p_1n_1}{n_1^2 + m_1^2} B_2 = k_1B_1 + k_2B_2 \\ D_2 &= -\frac{q_1m_1 + p_1n_1}{n_1^2 + m_1^2} B_1 + \frac{p_1m_1 - q_1n_1}{n_1^2 + m_1^2} B_2 = -k_2B_1 + k_1B_2 \end{aligned} \right\} \quad [38]$$

siendo:

$$k_1 = \frac{p_1m_1 - q_1n_1}{n_1^2 + m_1^2}, \quad k_2 = \frac{p_1n_1 + q_1m_1}{n_1^2 + m_1^2} \quad [39]$$

Análogamente, se tendrá:

$$\left. \begin{aligned} D_3 &= k_3 B_3 + k_4 B_4 \\ D_4 &= -k_4 B_3 + k_3 B_4 \end{aligned} \right\} [40]$$

siendo:

$$k_3 = \frac{p_2 m_2 - q_2 n_2}{n^2_2 + m^2_2}, \quad k_4 = \frac{p_2 n_2 + q_2 m_2}{n^2_2 + m^2_2};$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= 48\beta\alpha^2 cd + 18cd = 6cd(3 + 8\beta\alpha^2) \\ n_2 &= -24\beta\alpha^2(c^2 - d^2) + 20\beta\alpha^4 + 21\alpha^2 - 9(c^2 - d^2) = \alpha^2(21 + 20\beta\alpha^2) - 3(c^2 - d^2)(3 + 8\beta\alpha^2) \\ p_2 &= 108\beta\alpha(c^2 - d^2)d - 126\beta\alpha^3 cd + 54\beta\alpha cd; \\ q_2 &= 9\alpha + 27\beta\alpha(c^4 + d^4 - 6c^2 d^2) - 63\beta\alpha^3(c^2 - d^2) + 30\beta\alpha^5 + 27\beta\alpha(c^2 - d^2) - 30\beta\alpha^3, \end{aligned} \right\} [41]$$

Las expresiones [38] y [40] dan los valores de D_1 , D_2 , D_3 y D_4 en función de las constantes B, y unos coeficientes numéricos.

Si se sustituye en la primera ecuación de [16] los valores de u , v y w , dados por las expresiones [34] y [35], se pueden determinar las constantes C en función de las B:

$$-10\alpha^2(D_1\phi_1 + D_2\phi_2) + 3(D_1\phi_1 + D_2\phi_2) + 9\alpha(C_1\phi_5 + C_2\phi_6) + 6\alpha(B_1\phi_1 + B_2\phi_2) = 0$$

Sustituyendo los valores de las funciones ϕ , se tiene:

$$-10\alpha^2(D_1 \cdot \text{Cosh}\phi + D_2 \cdot \text{Senb}\phi) + 3[(a^2 - b^2)\text{Cosh}\phi + 2ab\text{Senb}\phi]D_1 + [(a^2 - b^2)\text{Senb}\phi - 2ab\text{Cosh}\phi]D_2 +$$

$$+9\alpha((-a\cos b\varphi - b\sin b\varphi)C_1 + (b\cos b\varphi - a\sin b\varphi)C_2) + 6\alpha(B_1\cos b\varphi + B_2\sin b\varphi) \equiv 0$$

La anulaci3n de los coeficientes de $\cos b\varphi$ y $\sin b\varphi$ da:

$$-9\alpha a C_1 + 9\alpha b C_2 + (\beta(a^2 - b^2) - 10\alpha^2)(k_1 B_1 + k_2 B_2) - 6ab(-k_2 B_1 + k_1 B_2) + 6\alpha B_1 = 0;$$

$$-9\alpha b C_1 - 9\alpha a C_2 + (\beta(a^2 - b^2) - 10\alpha^2)(-k_2 B_1 + k_1 B_2) + 6ab(k_1 B_1 + k_2 B_2) + 6\alpha B_2 = 0$$

Si se hace:

$$\left. \begin{aligned} k_5 &= \left[k_1 (\beta(a^2 - b^2) - 10\alpha^2) + 6abk_2 + 6\alpha \right] \frac{1}{9\alpha} \\ k_6 &= \left[k_2 (\beta(a^2 - b^2) - 10\alpha^2) - 6abk_1 \right] \frac{1}{9\alpha} \end{aligned} \right\} \quad [42]$$

el sistema toma la forma:

$$aC_1 - bC_2 = k_5 B_1 + k_6 B_2$$

$$bC_1 + aC_2 = -k_6 B_1 + k_5 B_2$$

de donde:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{k_5 a - k_6 b}{a^2 + b^2} B_1 + \frac{k_6 a + k_5 b}{a^2 + b^2} B_2 = k_9 B_1 + k_{10} B_2 \\ C_2 &= -\frac{k_6 a + k_5 b}{a^2 + b^2} B_1 + \frac{k_5 a - k_6 b}{a^2 + b^2} B_2 = -k_{10} B_1 + k_9 B_2 \end{aligned} \right\} \quad [43]$$

siendo:

$$k_9 = \frac{ak_5 - bk_6}{a^2 + b^2}; \quad k_{10} = \frac{ak_6 + bk_5}{a^2 + b^2}. \quad [44]$$

Análogamente:

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= k_{11}B_3 + k_{12}B_4 \\ C_4 &= -k_{12}B_3 + k_{11}B_4 \end{aligned} \right\} [45]$$

$$k_{11} = \frac{ck_7 - dk_8}{c^2 + d^2}; \quad k_{12} = \frac{ck_8 + dk_7}{c^2 + d^2}.$$

$$\left. \begin{aligned} k_7 &= \left[k_3 \left(3(c^2 - d^2) - 10\alpha^2 \right) + 6c.dk_4 + 6\alpha \right] \frac{1}{9\alpha} \\ k_8 &= \left[k_4 \left(3(c^2 - d^2) - 10\alpha^2 \right) - 6c.dk_3 \right] \frac{1}{9\alpha} \end{aligned} \right\} [46]$$

Las expresiones [43] y [45] dan los valores de las constantes C en función de las B.

Con estos valores de las constantes C y D en función de las B se pueden escribir:

$$\begin{aligned} u &= [(k_1B_1 + k_2B_2)\phi_1 + (k_1B_2 - k_2B_1)\phi_2 + (k_3B_3 + k_4B_4)\phi_3 + (k_3B_4 - k_4B_3)\phi_4] \cos \frac{\alpha x}{r} \\ v &= [(k_9B_1 + k_{10}B_2)\phi_5 + (k_9B_2 - k_{10}B_1)\phi_6 + (k_{11}B_3 + k_{12}B_4)\phi_7 + (k_{11}B_4 - k_{12}B_3)\phi_8] \sin \frac{\alpha x}{r} \\ w &= (B_1\phi_1 + B_2\phi_2 + B_3\phi_3 + B_4\phi_4) \sin \frac{\alpha x}{r} \end{aligned}$$

Estos valores sustituidos en las expresiones [14] y en las dos últimas de [11], dan todos los esfuerzos y corrimientos en función de las cuatro constantes B.

Esfuerzo longitudinal N_x :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{2.ES}{4\sqrt{3}lr} [5u' + 3v' + 3w] = \frac{2.ES}{4\sqrt{3}lr} [(-5\alpha D_1\phi_1 - 5\alpha D_2\phi_2 - 5\alpha D_3\phi_3 - 5\alpha D_4\phi_4) + \\ &+ 3(-aC_1\phi_1 - bC_1\phi_2 + bC_2\phi_1 - aC_2\phi_2 - cC_3\phi_3 - dC_3\phi_4 + dC_4\phi_3 - cC_4\phi_4) + \\ &+ 3(B_1\phi_1 + B_2\phi_2 + B_3\phi_3 + B_4\phi_4)] \sin \frac{\alpha x}{r} \end{aligned}$$

Haciendo operaciones se tiene:

$$N_x = \frac{2.ES}{4\sqrt{3}.lr} = \left\{ [(k_{13}B_1 + k_{14}B_2)\phi_1 + (-k_{14}B_1 + k_{13}B_2)\phi_2 + (k_{15}B_3 + k_{16}B_4)\phi_3 + \right. \\ \left. + (-k_{16}B_3 + k_{15}B_4)\phi_4] \text{Sen} \frac{\alpha.x}{r}, \right\} \quad [47]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{13} &= -5\alpha k_1 - 3\alpha k_9 - 3bk_{10} + 3 \\ k_{14} &= -5\alpha k_2 - 3\alpha k_{10} + 3bk_9 \\ k_{15} &= -5\alpha k_3 - 3ck_{11} - 3dk_{12} + 3 \\ k_{16} &= -5\alpha k_4 - 3ck_{12} + 3dk_{11} \end{aligned} \right\} \quad [48]$$

El esfuerzo transversal N_φ es :

$$N_\varphi = \frac{3.ES}{4\sqrt{3}.lr} [u' + 3v' + 3w'] = \frac{3.ES}{4\sqrt{3}.lr} \left\{ [(k_{17}B_1 + k_{18}B_2)\phi_1 + (-k_{18}B_1 + k_{17}B_2)\phi_2 + \right. \\ \left. + (k_{19}B_3 + k_{20}B_4)\phi_3 + (-k_{20}B_3 + k_{19}B_4)\phi_4] \text{Sen} \frac{\alpha.x}{r}, \right\} \quad [49]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{17} &= -\alpha k_1 - 3\alpha k_9 - 3bk_{10} + 3 \\ k_{18} &= -\alpha k_2 - 3\alpha k_{10} + 3bk_9 \\ k_{19} &= -\alpha k_3 - 3ck_{11} - 3dk_{12} + 3 \\ k_{20} &= -\alpha k_4 - 3ck_{12} + 3dk_{11} \end{aligned} \right\} \quad [50]$$

El esfuerzo tangencial N_{φ_x} es:

$$N_{\varphi_x} = \frac{3.ES}{4\sqrt{3}.lr} [u' + v'] = \frac{3.ES}{4\sqrt{3}.lr} \left[-D_1(a\phi_5 + b\phi_6) + D_2(b\phi_5 - a\phi_6) - D_3(c\phi_7 + d\phi_8) + \right. \\ \left. + D_4(d\phi_7 - c\phi_8) + \alpha C_1\phi_1 + \alpha C_2\phi_2 + \alpha C_3\phi_3 + \alpha C_4\phi_4 \right] \text{Cos} \frac{\alpha.x}{r}$$

Haciendo operaciones se tiene:

$$N_{\varphi x} = \frac{3.EI}{4\sqrt{3}.lr} \left\{ \begin{aligned} &[(k_{21}B_1 + k_{22}B_2)\phi_5 + (-k_{22}B_1 + k_{21}B_2)\phi_6 + (k_{23}B_3 + k_{24}B_4)\phi_7 + \\ &+ (-k_{24}B_3 + k_{23}B_4)\phi_8] \cos \frac{\alpha.x}{r}, \end{aligned} \right\} \quad [51]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{21} &= \alpha k_9 - ak_1 - bk_2 \\ k_{22} &= \alpha k_{10} - ak_2 + bk_1 \\ k_{23} &= \alpha k_{11} - ck_3 - dk_4 \\ k_{24} &= \alpha k_{12} - ck_4 + dk_3 \end{aligned} \right\} \quad [52]$$

El momento longitudinal M_x es :

$$M_x = \frac{2.EI}{4\sqrt{3}.lr^2} [3w + 3w' + 5w''] = \frac{2.EI}{4\sqrt{3}.lr^2} \left\{ \begin{aligned} &[(k_{25}B_1 + k_{26}B_2)\phi_1 + (-k_{26}B_1 + k_{25}B_2)\phi_2 + \\ &+ (k_{27}B_3 + k_{28}B_4)\phi_3 + (-k_{28}B_3 + k_{27}B_4)\phi_4] \operatorname{sen} \alpha \frac{x}{r}, \end{aligned} \right\} \quad [53]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{25} &= 3 - 5\alpha^2 + 3(a^2 - b^2) \\ k_{26} &= -6ab \\ k_{27} &= 3 - 5\alpha^2 + 3(c^2 - d^2) \\ k_{28} &= -6cd \end{aligned} \right\} \quad [54]$$

Análogamente, el momento transversal M_φ es:

$$M_\varphi = \frac{3.EI}{4\sqrt{3}.lr^2} [3w + 3w' + w''] = \frac{3.EI}{4\sqrt{3}.lr^2} \left\{ \begin{aligned} &[(k_{29}B_1 + k_{30}B_2)\phi_1 + (-k_{30}B_1 + k_{29}B_2)\phi_2 + \\ &+ (k_{31}B_3 + k_{32}B_4)\phi_3 + (-k_{32}B_3 + k_{31}B_4)\phi_4] \operatorname{sen} \frac{\alpha.x}{r}, \end{aligned} \right\} \quad [55]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{29} &= 3 - \alpha^2 + 3(a^2 - b^2) \\ k_{30} &= -6ab \\ k_{31} &= 3 - \alpha^2 + 3(c^2 - d^2) \\ k_{32} &= -6cd \end{aligned} \right\} \quad [56]$$

El momento de torsión tiene la expresión siguiente:

$$M_{\varphi\alpha} = \frac{3EI}{4\sqrt{3}lr^2} [u' - v' + 2w'] = \frac{3EI}{4\sqrt{3}lr^2} \left\{ (k_{33}B_1 + k_{34}B_2)\phi_5 + (-k_{34}B_1 + k_{33}B_2)\phi_6 + \right. \\ \left. + (k_{35}B_3 + k_{36}B_4)\phi_7 + (-k_{36}B_3 + k_{35}B_4)\phi_8 \right\} \cos \alpha \frac{x}{r}, \quad [57]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{33} &= -(ak_1 + bk_2 + \alpha.k_9 + 2\alpha.a) \\ k_{34} &= -ak_2 + bk_1 - \alpha.k_{10} + 2\alpha.b \\ k_{35} &= -(ck_3 + dk_4 + \alpha.k_{11} + 2\alpha.c) \\ k_{36} &= -ck_4 + dk_3 - \alpha.k_{12} + 2\alpha.d \end{aligned} \right\} \quad [58]$$

La reacción en el borde longitudinal será:

$$R_\phi = Q_\phi + \frac{1}{r} M'_{\varphi\alpha} = \frac{1}{r} [M'_{\varphi} + 2M'_{\varphi\alpha}]$$

que se puede poner en la forma:

$$R_\phi = \frac{3EI}{4\sqrt{3}lr^3} \left\{ (k_{37}B_1 + k_{38}B_2)\phi_5 + (-k_{38}B_1 + k_{37}B_2)\phi_6 + \right. \\ \left. + (k_{39}B_3 + k_{40}B_4)\phi_7 + (-k_{40}B_3 + k_{39}B_4)\phi_8 \right\} \sin \alpha \frac{x}{r}, \quad [59]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{37} &= -ak_{29} - bk_{30} - 2\alpha.k_{33} \\ k_{38} &= -ak_{30} + bk_{29} - 2\alpha.k_{34} \\ k_{39} &= -ck_{31} - dk_{32} - 2\alpha.k_{35} \\ k_{40} &= -ck_{32} + dk_{31} - 2\alpha.k_{36} \end{aligned} \right\} [60]$$

Y el giro de una sección será:

$$\theta = \frac{1}{r}(-v + w) = \frac{1}{r} \left[(k_{41}B_1 + k_{42}B_2)\phi_5 + (-k_{42}B_1 + k_{41}B_2)\phi_6 + \right. \\ \left. + (k_{43}B_3 + k_{44}B_4)\phi_7 + (-k_{44}B_3 + k_{43}B_4)\phi_8 \right] \text{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \quad [61]$$

siendo:

$$\begin{aligned} k_{41} &= -k_9 - a \\ k_{42} &= -k_{10} + b \\ k_{43} &= -k_{11} - c \\ k_{44} &= -k_{12} + d \end{aligned} \quad [62]$$

El esfuerzo cortante normal a la lámina Q_φ será:

$$Q_\varphi = \frac{1}{r} (M'_\varphi + M'_{\varphi x}) = \frac{3EI}{4\sqrt{3}lr^3} \left[(k_{45}B_1 + k_{46}B_2)\phi_5 + (-k_{46}B_1 + k_{45}B_2)\phi_6 + \right. \\ \left. + (k_{47}B_3 + k_{48}B_4)\phi_7 + (-k_{48}B_3 + k_{47}B_4)\phi_8 \right] \text{Sen} \alpha \frac{x}{r}, \quad [63]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{45} &= -ak_{29} - bk_{30} - \alpha.k_{33} \\ k_{46} &= -ak_{30} + bk_{29} - \alpha.k_{34} \\ k_{47} &= -ck_{31} - dk_{32} - \alpha.k_{35} \\ k_{48} &= -ck_{32} + dk_{31} - \alpha.k_{36} \end{aligned} \right\} [64]$$

Y, por último, el esfuerzo cortante Q_x será:

$$Q_x = \frac{1}{r} (M'_x + M'_{\varphi x}) = \frac{3EI}{4\sqrt{3}lr^3} \left[(k_{49}B_1 + k_{50}B_2)\phi_1 + (-k_{50}B_1 + k_{49}B_2)\phi_2 + \right. \\ \left. + (k_{51}B_3 + k_{52}B_4)\phi_3 + (-k_{52}B_3 + k_{51}B_4)\phi_4 + \right. \\ \left. + (k_{53}B_5 + k_{54}B_6)\phi_5 + (-k_{54}B_5 + k_{53}B_6)\phi_6 + \right. \\ \left. + (k_{55}B_7 + k_{56}B_8)\phi_7 + (-k_{56}B_7 + k_{55}B_8)\phi_8 \right] \quad [65]$$

$$+ (k_{51}B_3 + k_{52}B_4)\phi_3 + (-k_{52}B_3 + k_{51}B_4)\phi_4 \Big] \cos \alpha \frac{x}{r}, \quad [65]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} k_{49} &= \frac{2}{3} \alpha k_{25} - a k_{33} - b k_{34} \\ k_{50} &= \frac{2}{3} \alpha k_{26} - a k_{34} + b k_{33} \\ k_{51} &= \frac{2}{3} \alpha k_{27} - c k_{35} - d k_{36} \\ k_{52} &= \frac{2}{3} \alpha k_{28} - c k_{36} + d k_{35} \end{aligned} \right\} \quad [66]$$

Con las ecuaciones [37] a [66], se tiene preparado el camino para la resolución numérica del estado homogéneo, y la ordenación que puede darse al cálculo se la presentara en el programa computacional.

Condiciones de borde

“Con los valores hallados en los cuadros anteriores se puede plantear las condiciones de borde y hallar las constantes B_1 , B_2 , B_3 , y B_4 citadas anteriormente. Las condiciones del borde para $\varphi=0$ son las siguientes:

1.ª. *Giro de la sección extrema igual a cero; es decir, $\theta = 0$:*

$$B_1[k_{41}\phi_5 - k_{42}\phi_6] + B_2[k_{42}\phi_5 + k_{41}\phi_6] + B_3[k_{43}\phi_7 - k_{44}\phi_8] + B_4[k_{44}\phi_7 + k_{43}\phi_8] = 0$$

En esta condición no se tiene en cuenta el giro debido al estado membrana, ya que su valor es despreciable.



2.^a. Corrimiento horizontal nulo; es decir, $w - v = 0$:

$$B_1(\phi_1 - k_9\phi_5 + k_{10}\phi_6) + B_2(\phi_2 - k_{10}\phi_5 - k_9\phi_6) + B_3(\phi_3 - k_{11}\phi_7 + k_{12}\phi_8) + \\ + B_4(\phi_4 - k_{12}\phi_7 - k_{11}\phi_8) + w_m - v_m = 0$$

3.^a. Esfuerzo vertical nulo; es decir, $R_\phi - N_\phi - N_{\phi m} = 0$:

$$\frac{3EI}{4\sqrt{3}lr^3} [B_1(k_{37}\phi_5 - k_{38}\phi_6) + B_2(k_{38}\phi_5 + k_{37}\phi_6) + B_3(k_{39}\phi_7 - k_{40}\phi_8) + B_4(k_{40}\phi_7 - k_{39}\phi_8)] - \\ - \frac{3ES}{4\sqrt{3}lr} [B_1(k_{17}\phi_1 - k_{18}\phi_2) + B_2(k_{18}\phi_1 + k_{17}\phi_2) + B_3(k_{19}\phi_3 - k_{20}\phi_4) + B_4(k_{20}\phi_3 + k_{19}\phi_4)] - \\ - N_{\phi m} = 0$$

4.^a. Esfuerzo tangencial nulo; es decir, $N_{\phi x} = 0$:

$$\frac{3ES}{4\sqrt{3}lr} [B_1(k_{21}\phi_5 - k_{22}\phi_6) + B_2(k_{22}\phi_5 + k_{21}\phi_6) + B_3(k_{23}\phi_7 - k_{24}\phi_8) + B_4(k_{24}\phi_7 + k_{23}\phi_8)] + \\ + N_{\phi xm} = 0$$

Sustituyendo los valores de las k correspondientes al primer término, se tiene:

$$-4,75284B_1 + 1,66323B_2 - 1,83995B_3 + 3,77495B_4 = 0;$$

$$0,809270B_1 - 0,0613158B_2 + 0,957040B_3 - 0,180864B_4 = 224,696 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

$$-0,00399863B_1 - 0,0279821B_2 + 0,00712326B_3 + 0,0360006B_4 = -702,247 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

$$-0,0387348B_1 - 0,102642B_2 + 0,0882183B_3 + 0,0398606B_4 = 873,494 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES};$$

sistema cuya solución es:

$$B_1 = -21.703 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES} \quad B_2 = 3.833 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

$$B_3 = 14.703 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

$$B_4 = -21.847 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

Análogamente, se tendrá para el segundo término:

$$-8,88336B_1 + 2,68833B_2 - 3,87997B_3 + 6,10334B_4 = 0;$$

$$0,899495B_1 - 0,00496121B_2 + 0,930941B_3 - 0,136333B_4 = 95,0192 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

$$-0,0797044B_1 - 0,261863B_2 + 0,0547834B_3 + 0,335281B_4 = -234,082 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

$$-0,226020B_1 - 0,520631B_2 + 0,459179B_3 + 0,263931B_4 = 97,0549 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES};$$

sistema que tiene como solución:

$$B_1 = -678,2 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES} \quad B_2 = 323,6 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES} \quad B_3 = 654,6 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

$$B_4 = -713,6 \frac{4rl}{\sqrt{3}ES}$$

Sustituyendo los valores hallados anteriormente en las expresiones de los

esfuerzos y recorridos del capítulo anterior, se tiene:

Primer término.

$$N_x = (3.809\phi_1 - 6.257\phi_2 + 7.331\phi_3 - 2.047\phi_4 + N_{xm}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_\varphi = (108,2\phi_1 + 765,9\phi_2 + 796,6\phi_3 + 561,9\phi_4 + N_{\varphi m}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_{\varphi x} = (446\phi_5 - 2.375\phi_6 + 415\phi_7 - 2.650\phi_8 + N_{\varphi xm}) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_x = (-118,5\phi_1 - 90,0\phi_2 + 29,6\phi_3 + 190,0\phi_4) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_\varphi = (-213,2\phi_1 - 128,8\phi_2 + 68,4\phi_3 + 249,3\phi_4) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_{\varphi x} = (55,6\phi_5 + 8,7\phi_6 - 58,5\phi_7 - 7,8\phi_8) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_x = (-66,0\phi_1 - 43,1\phi_2 + 19,3\phi_3 + 86,7\phi_4) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_\varphi = (100,7\phi_5 + 144,7\phi_6 + 153,8\phi_7 - 114,3\phi_8) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$v = (-0,00465\phi_5 + 0,00247\phi_6 - 0,00367\phi_7 - 0,00608\phi_8 + v_m) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$w = (-0,02597\phi_1 + 0,000001\phi_2 + 0,01848\phi_3 - 0,000316\phi_4 + w_m) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r}$$

Segundo término.

$$N_x = (199\phi_1 - 778\phi_2 + 733\phi_3 - 248\phi_4 + N_{xm}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_\varphi = (50\phi_1 + 225\phi_2 + 240\phi_3 + 241\phi_4 + N_{\varphi m}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_{\varphi x} = (-15\phi_5 - 426\phi_6 + 112\phi_7 - 449\phi_8 + N_{\varphi xm}) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_x = (-11,7\phi_1 - 6,8\phi_2 - 2,1\phi_3 + 23,8\phi_4) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_{\varphi} = (-27,5\phi_1 - 5,5\phi_2 + 6,3\phi_3 + 25,2\phi_4) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r};$$

$$M_{\varphi x} = (10,5\phi_5 - 1,7\phi_6 - 10,5\phi_7 - 1,9\phi_8) \operatorname{Cos} \alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_x = (-23,6\phi_1 - 7,2\phi_2 + 2,6\phi_3 + 28,8\phi_4) \operatorname{Cos} \alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_{\varphi} = (27,1\phi_5 + 20,1\phi_6 + 28,2\phi_7 - 19,3\phi_8) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r};$$

$$v = (-0,000079\phi_5 + 0,000043\phi_6 - 0,000063\phi_7 - 0,000163\phi_8 + v_m) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r};$$

$$w = (-0,000812\phi_1 + 0,000388\phi_2 + 0,000784\phi_3 - 0,000854\phi_4 + w_m) \operatorname{Sen} \alpha \frac{x}{r}$$

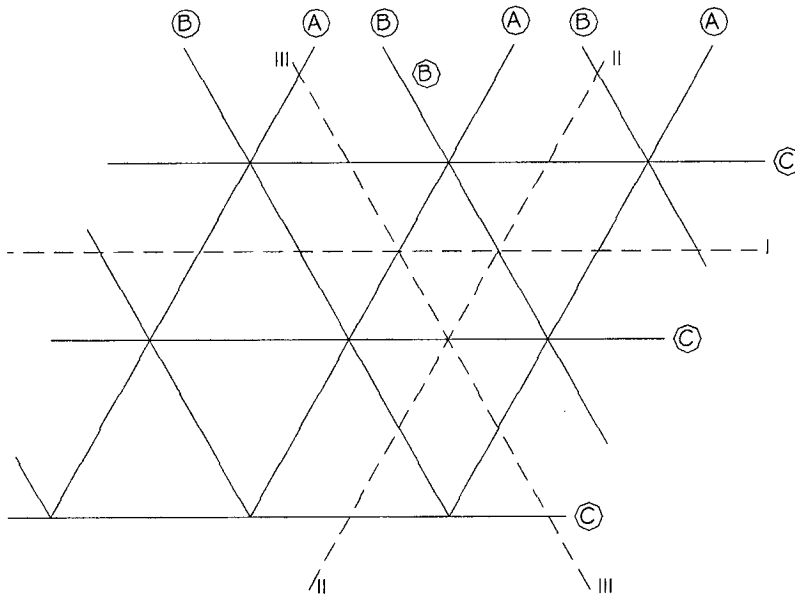
De estas expresiones se sacan los esfuerzos y recorridos en cualquier punto de la lámina, cuyos valores vendrán dados para las abscisas unitarias x/L y para φ .¹³

ESFUERZOS Y MOMENTOS EN LAS BARRAS

Conocidos los esfuerzos y momentos unitarios, hallados en los cuadros anteriores, falta únicamente determinar las tensiones en las barras.

Para ello se deducirán en lo que sigue unas fórmulas que, aunque aproximadas, no producen errores apreciables en los casos prácticos. Estas fórmulas se deducen fácilmente estudiando los esfuerzos y momentos que actúan en las secciones I - I, II - II y III - III (fig. 23).

¹³ POZO VINDEL, Florencio J. Del. ESTUDIO DE CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS RIGIDIZADAS. Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento. Madrid-España. 1990.

**Figura 23.**

Si se observa, por ejemplo, la sección II – II (fig. 24) y se tiene en cuenta la uniformidad con que se repiten las barras, se puede tomar la zona A B y estudiar su equilibrio. Si además suponemos que en esta zona los esfuerzos unitarios son constantes, los cuatro esfuerzos que solicitan la sección A B serán F_1 , F_2 , F_3 y F_4 , cuyos valores serán:

$$F_1 = N_{\varphi} \cdot \overline{AC} = -N_{\varphi} \cdot \overline{AB} \cdot \cos 60^\circ = -N_{\varphi} \cdot \frac{l}{2};$$

$$F_2 = N_{\varphi x} \cdot \overline{BC} = N_{\varphi x} \cdot \overline{AB} \cdot \sin 60^\circ = N_{\varphi x} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$F_3 = N_x \cdot \overline{BC} = N_x \cdot \overline{AB} \cdot \sin 60^\circ = N_x \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$F_4 = N_{\varphi x} \cdot \overline{AC} = -N_{\varphi x} \cdot \overline{AB} \cdot \cos 60^\circ = -N_{\varphi x} \cdot \frac{l}{2}$$

Estos esfuerzos tienen que resistirlos las dos barras comprendidas en la

zona A B; es decir, habrá que descomponer en las direcciones de las dos barras citadas las fuerzas P_1 y P_2 resultantes de los esfuerzos anteriores. Como P_1 y P_2 tienen por valor:

$$P_1 = \frac{l}{2} [\sqrt{3} N_x - N_{\varphi x}]$$

$$P_2 = \frac{l}{2} [\sqrt{3} N_{\varphi x} - N_{\varphi}]$$

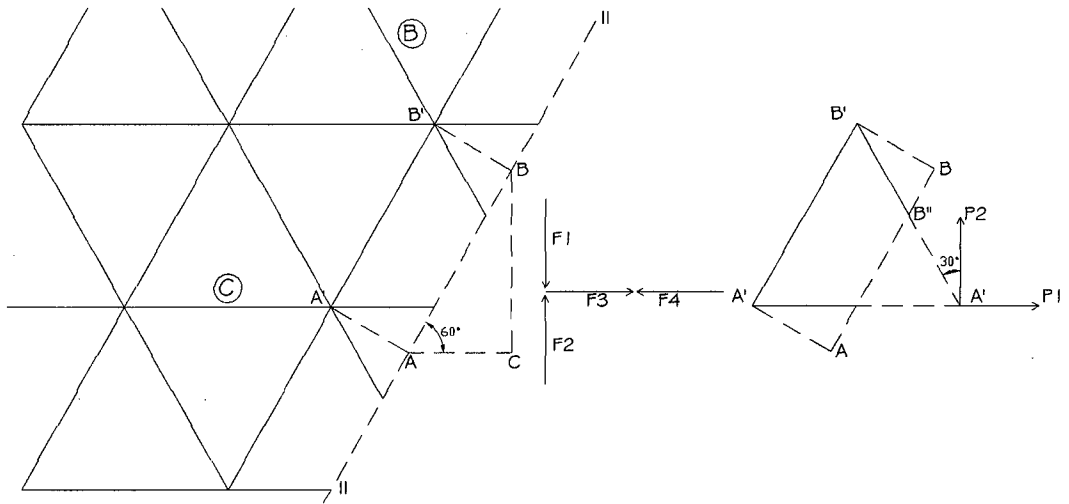


Figura 24.

los esfuerzos que actúan en las barras "b" y "c" serán, por consiguiente:

$$N_b = -P_2 \frac{1}{\cos 30^\circ} = -P_2 \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} [N_{\varphi} - \sqrt{3} N_{\varphi x}]$$

$$N_b = -P_2 \frac{1}{\cos 30^\circ} = -P_2 \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} [N_{\varphi} - \sqrt{3} N_{\varphi x}]$$

$$N_c = P_1 + P_2 \cdot \tan 30^\circ = P_1 + \frac{P_2}{\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \left[N_x - \frac{N_{\varphi}}{3} \right]$$

Mediante las secciones I - I ó II - II se pueden determinar las expresiones

de los esfuerzos en las barras “a”, y, análogamente a como se ha hecho en los esfuerzos, se pueden hallar las expresiones de los momentos flectores en las barras.

Las expresiones de estos esfuerzos y momentos en las barras son:

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{l}{\sqrt{3}} [N_\varphi + \sqrt{3} N_{\varphi x}] & M_a &= \frac{l}{\sqrt{3}} [M_\varphi + \sqrt{3} M_{\varphi x}] \\ N_b &= \frac{l}{\sqrt{3}} [N_\varphi - \sqrt{3} N_{\varphi x}] & M_b &= \frac{l}{\sqrt{3}} [M_\varphi - \sqrt{3} M_{\varphi x}] \\ N_c &= \frac{l\sqrt{3}}{2} \left[N_x - \frac{N_\varphi}{3} \right] & M_c &= \frac{l\sqrt{3}}{2} \left[M_x - \frac{M_\varphi}{3} \right] \end{aligned}$$

siendo N_a y M_a , N_b y M_b , N_c y M_c los esfuerzos y momentos flectores que actúan en las barras “a”, “b” y “c” (fig. 23); N_φ , N_x , $N_{\varphi x}$, M_φ , M_x y $M_{\varphi x}$, los valores de los esfuerzos y momentos unitarios anteriormente determinados, y l , el lado del triángulo de la retícula.

Con el convenio de signos que se ha utilizado los esfuerzos serán de tracción cuando tengan el signo positivo, y los momentos flectores serán positivos cuando produzcan tracción en las fibras interiores del perfil.

Con objeto de tener una aproximación mayor, en las fórmulas anteriores los valores de los esfuerzos y momentos unitarios que entran en ellas deberán ser los correspondientes a la sección de la barra en que se quieren obtener las solicitaciones.

Para las barras de los bordes longitudinales se pueden aplicar las

expresiones:

$$N_c = \frac{3\sqrt{3}}{8} l \left[N_x - \frac{N_\varphi}{3} \right]$$

$$M_c = \frac{3\sqrt{3}}{8} l \left[M_x - \frac{M_\varphi}{3} \right]$$

estas expresiones se obtienen fácilmente teniendo en cuenta que en los bordes la longitud AB tiene por valor $\frac{3}{4} l$.



NOTACIÓN

$a =$ parte real de cuatro de las soluciones de la ecuación característica de octavo grado.

$b =$ parte imaginaria de cuatro de las soluciones de la ecuación característica de octavo grado.

$B_1, B_2, B_3, \dots, B_8 =$ constantes de integración que se determinarán con las condiciones de sustentación en los bordes de la lámina.

$c =$ igual que a .

$c_0, c_2, c_4, c_6 =$ coeficientes de la ecuación característica de octavo grado.

$d =$ igual que b .

$E =$ módulo de elasticidad del material de las barras que constituyen la retícula.

$E_x =$ módulo de elasticidad longitudinal.

$E_\varphi =$ módulo de elasticidad transversal.

$e =$ base de los logaritmos neperianos.

$f_1(\varphi), f_2(\varphi) =$ funciones de integración.

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \varphi}; \quad f'' = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}; \quad f''' = \frac{\partial^3 f}{\partial \varphi^3} \dots$$

$$f' = r \frac{\partial f}{\partial x}; \quad f'' = r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad f''' = r^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \dots$$

$G =$ módulo de rigidez.

$I =$ momento de inercia de las barras que constituyen la retícula.

$$i = \sqrt{-1}$$

$L =$ longitud de la lámina entre apoyos.

l = lado del triángulo equilátero que forma la retícula.

M_a, M_b = momentos de flexión en las barras diagonales, positivos si producen tracción en intradós.

M_l = momento de flexión en las barras longitudinales, positivos si producen tracción en intradós.

M_x = momento unitario de flexión en una sección transversal de la lámina, supuesta continua. Positivo si produce tracción en intradós.

M_φ = momento unitario de flexión en una sección longitudinal de la lámina, supuesta continua. Positivo si produce tracción en intradós.

$M_{\varphi x}, M_{x\varphi}$ = momentos unitarios de torsión de la lámina, supuesta continua. Positivos cuando producen un esfuerzo tangencial positivo en intradós.

m = raíz de la ecuación característica de octavo grado.

N_a, N_b = esfuerzo normal en las barras diagonales, positivo si es un esfuerzo de tracción.

N_l = esfuerzo normal en las barras longitudinales, positivo si es un esfuerzo de tracción.

N_x = esfuerzo unitario normal en una sección transversal de la lámina, supuesta continua. Positivo si es tracción.

N_φ = esfuerzo unitario normal en una sección longitudinal de la lámina, supuesta continua. Positivo si es tracción.

$N_{\varphi x}, N_{x\varphi}$ = esfuerzo unitario tangencial en el plano de la lámina, supuesta continua. Positivo cuando produce una tracción según los valores de las coordenadas crecientes.

n = número entero impar. $n=1$ para el primer término de la serie de FOURIER, $n=3$ para el segundo, etc.

p = carga de peso propio por unidad de área o cualquier sobrecarga de distribución análoga.

Q_x = esfuerzo cortante unitario radial en una sección transversal. Positivo si actúa hacia arriba en las caras más próximas al eje de las x .

Q_ϕ = esfuerzo cortante unitario radial en una sección longitudinal. Positivo si actúa hacia arriba en las caras más próximas al eje de las ϕ .

q = sobrecarga uniformemente repartida por unidad de área en planta.

R_ϕ = reacción por unidad de longitud en los bordes longitudinales.

r = radio de la sección transversal de la lámina, medido desde el centro a la superficie media.

S = área de la sección transversal de las barras que constituyen la retícula.

u = corrimiento longitudinal.

v = corrimiento transversal.

w = corrimiento radial.

x = coordenada longitudinal medida desde el apoyo dorsal de la lámina

Y = componente tangencial de las cargas exteriores a la lámina, por unidad de área.

Z = componente radial de las cargas exteriores a la lámina, por unidad de área.

z = coordenada normal a la lámina.

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi \cdot r}{L}$$

$$\beta = \frac{I}{S.r^2}$$

$$\gamma_{x\alpha}, \gamma_{x\varphi}, \gamma_{\varphi\alpha} = \text{deslizamientos}$$

$$\delta = \text{espesor ficticio de la lámina.}$$

$$\varepsilon_x = \text{deformación longitudinal.}$$

$$\varepsilon_\varphi = \text{deformación transversal}$$

$$\varepsilon_\alpha = \text{deformación radial}$$

$$\theta = \text{rotación de la lámina, positivo si la sección gira según las agujas del reloj.}$$

$$\sigma_x = \text{tensión longitudinal}$$

$$\sigma_\varphi = \text{tensión transversal}$$

$$\sigma_\alpha = \text{tensión radial}$$

$$\tau_{x\alpha}, \tau_{x\varphi}, \tau_{\varphi\alpha} = \text{tensiones tangenciales.}$$

$$\varphi = \text{coordenada angular medida desde el borde derecho de la lámina.}$$

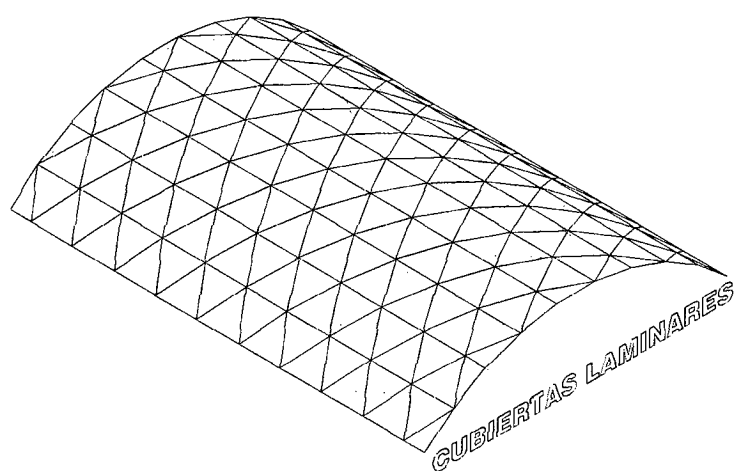
$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_s = \text{funciones de } \varphi$$

$$\phi_k = \text{semiángulo de la lámina}$$

$$\nu_x = \text{coeficiente de POISSON, longitudinal.}$$

$$\nu_\varphi = \text{coeficiente de POISSON, transversal.}$$

$$w = \text{ángulo medido desde el borde izquierdo de la lámina.}$$



CAPITULO VII

7. PLANIFICACIÓN Y ESTRUCTURACIÓN DEL PROGRAMA.

7.1 REVISIÓN DE DATOS DE DISEÑO.

Para la ejecución del programa computacional debemos especificar primeramente los datos que vamos a necesitar, tanto en su conceptualización, como en las unidades en las que se desea trabajar a fin de que las operaciones que se realicen sean totalmente compatibles.

NOMBRE DE LA ESTRUCTURA.- Es el nombre con el que se creará un directorio en el que se almacenarán todos los archivos que se deriven en la ejecución del programa.

NÚMERO DE DIVISIONES.- Es el número de divisiones que tiene la cáscara a lo largo de la viga de borde(#LL) y en el sentido corto de la misma (#LC)

MÓDULO DE ELASTICIDAD.- Se refiere a los módulos de elasticidad (relación entre el esfuerzo aplicado a un cuerpo y la deformación unitaria producida) de los miembros. Está expresado en Kg/m^2 .

INERCIA.- Se refiere a la inercia (capacidad que tiene un cuerpo para permanecer inmóvil mientras no se le aplique ninguna fuerza externa) de los miembros. Se expresa en m^4 .

Φ_k .- Es el semiángulo de la lámina. Esta expresado en grados sexagesimales.

LONGITUD LARGA (LL).- Se refiere a la longitud de la lámina, expresada en m.

LONGITUD CORTA (LC).- Es la dimensión corta de la lámina, expresada en m.

LADO DE LA RETÍCULA (I).- Se refiere a la dimensión del lado del triángulo equilátero determinado por el número de divisiones del lado más largo de la lámina, el cual solo intervendrá al final del cálculo en el planteamiento de las ecuaciones de borde y en la obtención de los esfuerzos que actúan sobre las barras de la retícula.

ESTADOS DE CARGA (E).- Se refiere a los diversos estados de carga y combinaciones, estipulados en el código ecuatoriano de la construcción.(C.E.C).

7.2 PLANIFICACIÓN DE ALGORITMOS.

El programa será bajo entorno de Windows 95, debe brindar facilidad de comprensión en lo que tiene que ver a los requerimientos de ingreso de datos por parte del usuario.

Debido a que existen muchas variables que se deben ingresar y procesar durante la elaboración del programa, tenemos que limitar al mínimo la posibilidad de confusión en el uso de dichas variables; por lo tanto se trabajará con subrutinas explícitas para los casos en que se tenga que utilizar denominaciones iguales para valores diferentes.

El programa debe facilitar la rectificación inmediata de los datos que ingresa el usuario, en caso de que estos sean erróneos.

En el caso que se presente datos o resultados de interés durante la ejecución del programa, se procederá a visualizarlos por pantalla, con opción de salida del reporte en impresora.

Haciendo un resumen de las principales herramientas podemos mencionar las siguientes:

- Disponibilidad de corrección de datos de entrada
- Menú principal desplegable al hacer click sobre cualquiera de las opciones brindando facilidades para el análisis de la cubierta.
- Presentación de pantallas generadoras de resultados.
- Optimización de los resultados de análisis preliminar mediante la inclusión de una amplia base de perfilera nacional del proveedor IPAC, como la posibilidad de ser creada por el usuario.
- Visualización de la malla triangular de la cubierta en planta y en tres dimensiones.
- Análisis de la cubierta laminar.

7.3 ESTRUCTURACIÓN DE ALGORITMOS.

- a. Presentar pantalla iniciales.
 - Una pantalla para información general como autor, tema, logotipo, etc.

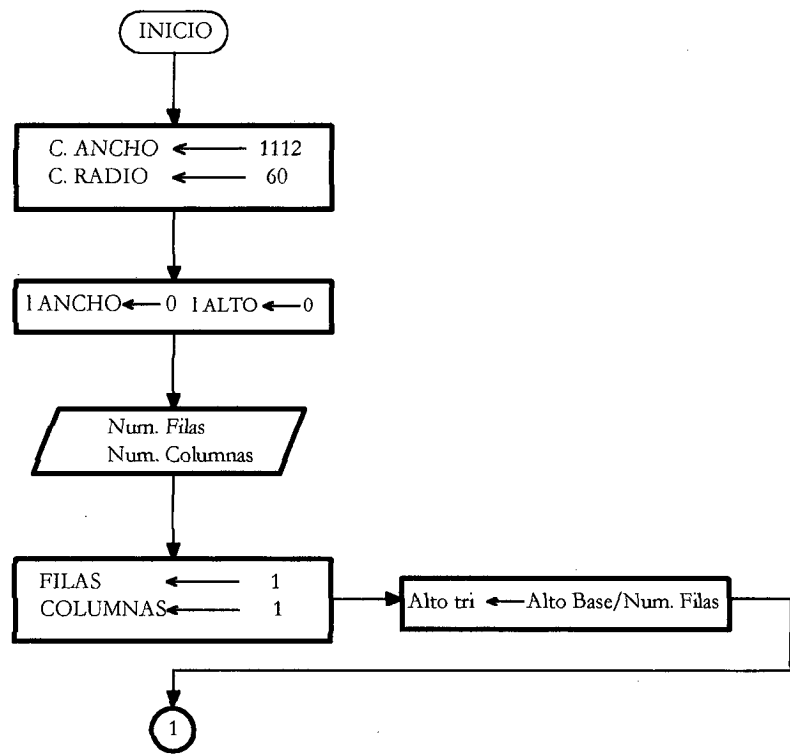
- Una pantalla para el menú principal de opciones. Cada opción ejecutará una subrutina.
- b. Elaborar una opción que permita visualizar los datos ingresados anteriormente, y a la vez, que permita su modificación.
- Abrir los archivos creados anteriormente, pertenecientes a una estructura específica para su visualización, rectificación e impresión.
- c. Ingresar datos generales de la estructura laminar, tales como: nombre de la estructura, longitud corta, longitud larga, porcentaje, número de divisiones longitud corta, larga, etc. Este ingreso se debe hacer en el orden que se requiera para su proceso, permitiendo su modificación inmediata en caso de haber cometido algún error en la entrada.
- Graficar la cubierta con los datos ingresados.
- d. Calcular los esfuerzos para el estado membrana.
- e. Calcular los esfuerzos unitarios longitudinales y transversales.
- f. Calcular los esfuerzos unitarios y momentos de torsión longitudinales y transversales.
- g. Calcular las tensiones y momentos finales.

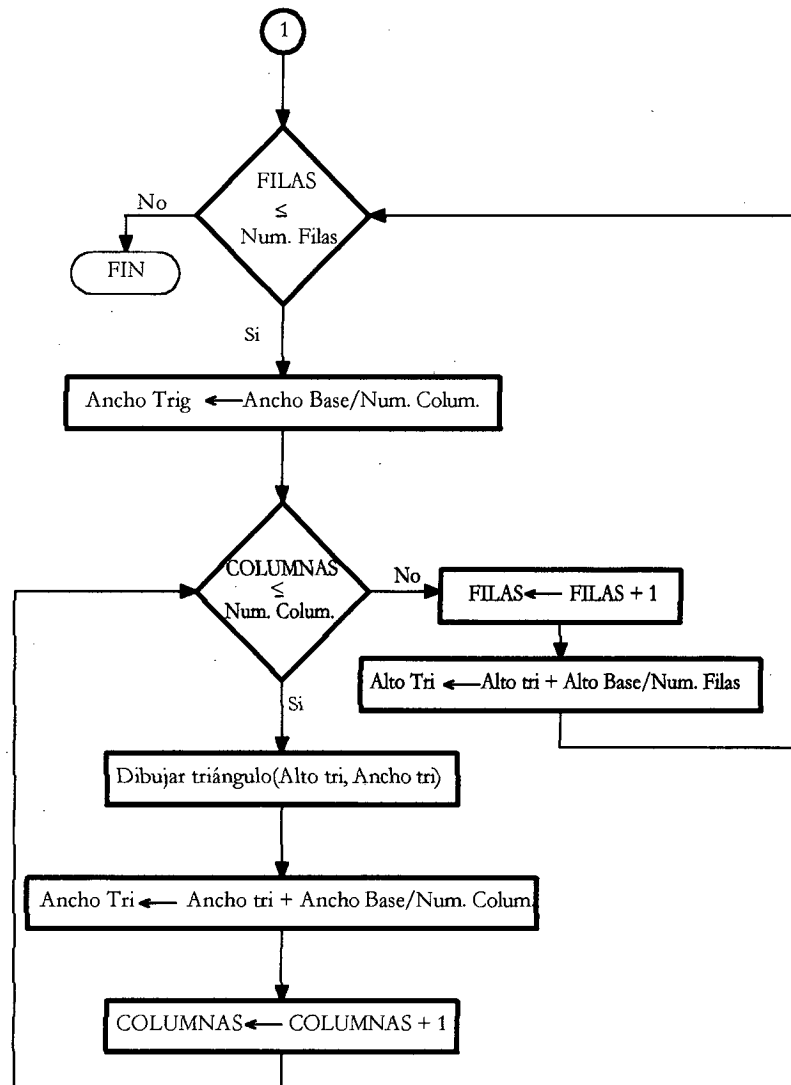
7.4 DIAGRAMA DE FLUJO GENERAL.

Debido a la gran cantidad de subrutinas utilizadas en la elaboraci3n del presente programa, no justifica su presentaci3n, sin embargo, para un mejor entendimiento se presentar3n algunas de las mismas, con la ayuda de un grupo de diagramas de flujo.

Flujograma N3 1

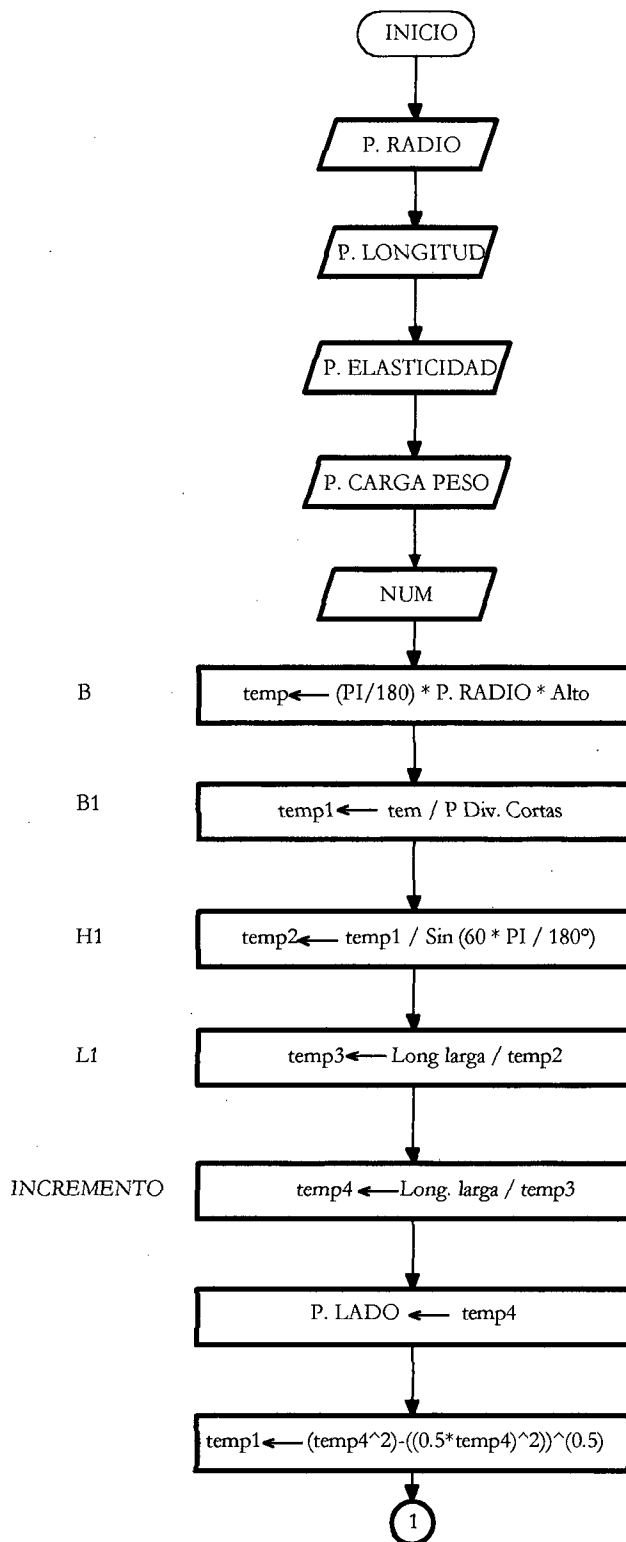
FUNCI3N GRAFICAR

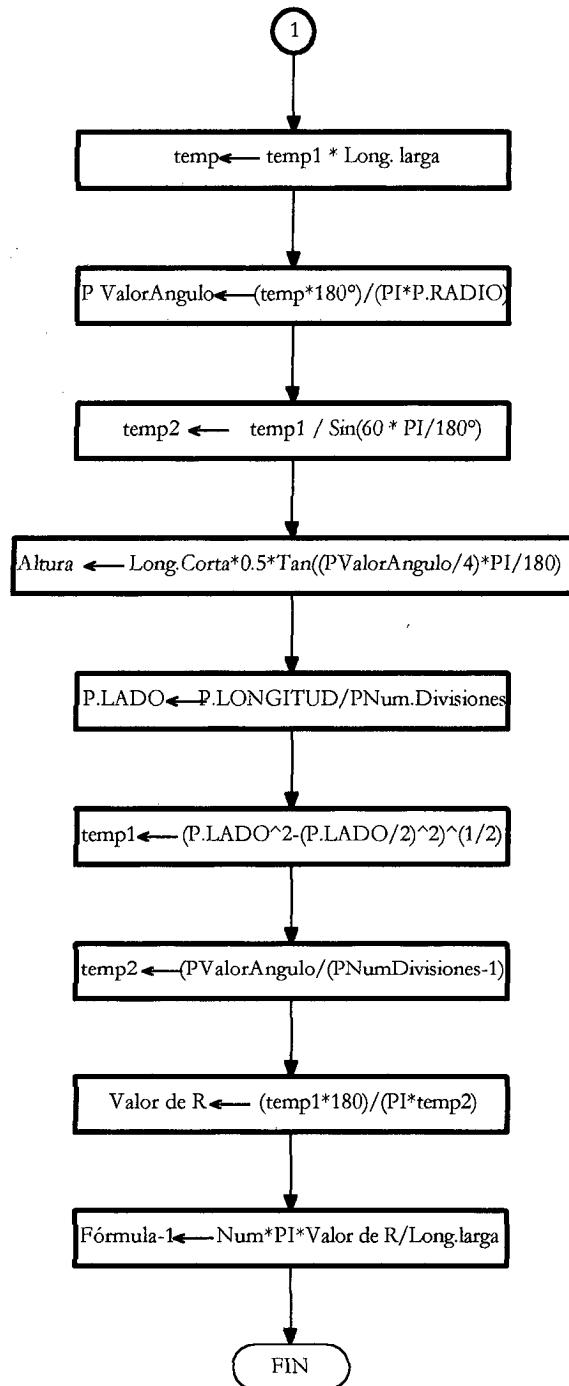




Flujograma N°2

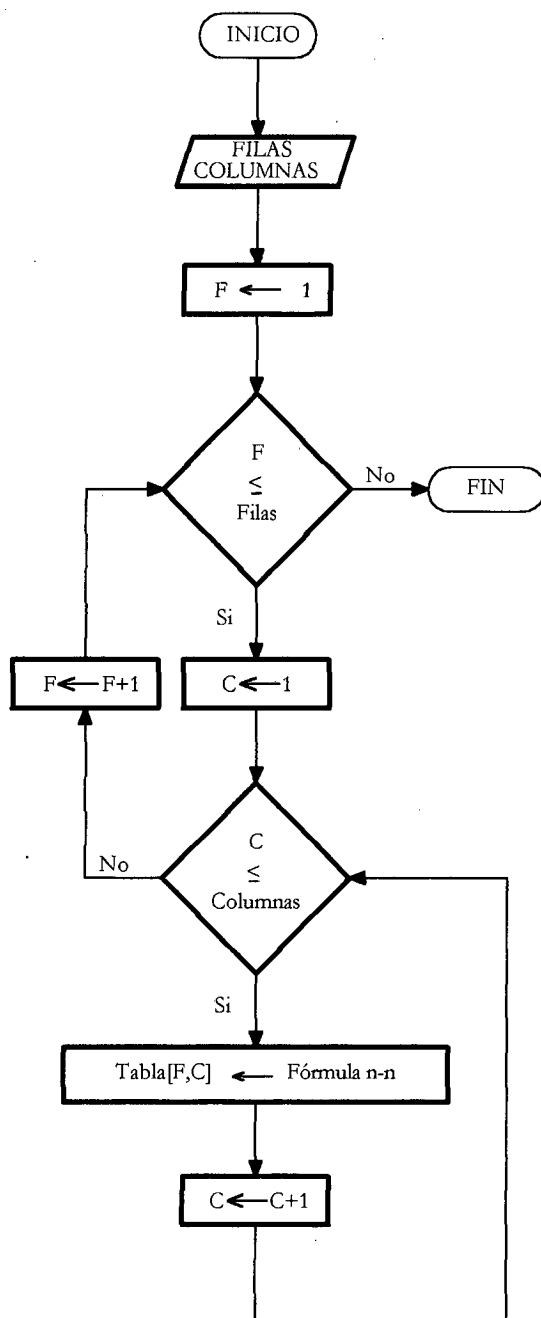
CÁLCULO DE FÓRMULAS:





Flujograma N° 3

PRESENTAR RESULTADOS:



7.5 SALIDA DE RESULTADOS.

Todos los resultados de los diferentes procesos que realiza el programa, primeramente se visualizaran en pantalla y tienen la opción de salida inmediata por impresora.

Para tener una idea más clara de los resultados que se obtienen, se ilustrará más adelante con ejemplos de aplicación.

7.6 LIMITACIONES DEL PROGRAMA.

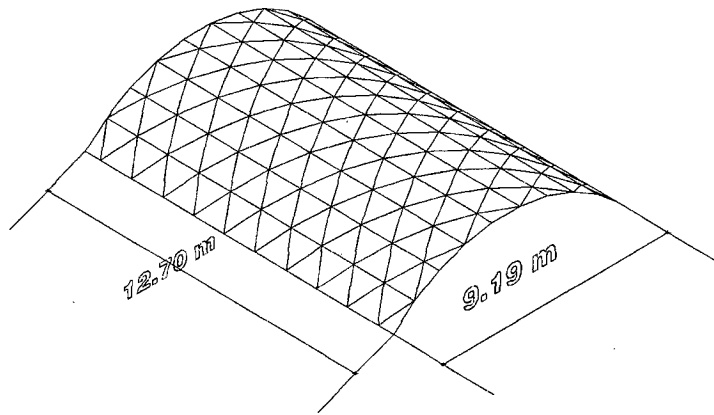
Como es de prever ningún software de diseño puede abarcar todas las facetas del mismo y por esto nos adelantamos en dejar claras las limitaciones del programa:

- No tiene opción deshacer.
- Sólo detecta errores lógicos en introducción de datos, es su responsabilidad verificar que los datos se hayan ingresado correctamente.
- No efectúa la presentación de la estructura en tres dimensiones.
- Sólo se trabajará en unidades métricas específicamente Kg, m, seg.
- Calculará específicamente cubiertas laminas cilíndricas aisladas, la inclusión de cubiertas de otra forma sería motivo de una nueva investigación.
- El análisis y resultados presentará sólo de la cuarta parte de la cubierta.

7.7 EJERCICIO DE APLICACIÓN Y COMPROBACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL PROGRAMA.

A continuación, y como aplicación de la teoría expuesta anteriormente, se desarrolla el cálculo de una lámina triangulada.

Las dimensiones principales de la misma, se pueden ver en la siguiente figura:



En el ejemplo se ha considerado que dan una aproximación suficiente de los primeros términos de la serie de Fourier.

Las características y parámetros fundamentales de la lámina son las siguientes:

L_c (Longitud corta) = 9.19 m

L_l (Longitud larga) = 12.70 m

E (Módulo de Elasticidad) = $2.1 \times 10^6 \text{ Kg/m}^2$.

ϕ_k (Semiángulo) = 45°

p (Carga total) = 120 Kg/m^2 .

CÁLCULO MANUAL

DATOS

r(radio)=	6.50 m
L(longitud)=	12.70 m
l(lado triángulo)=	1.27 m
E(Módulo de Elasti	21000000000 Kg/m2
Φ k(semiángulo)	45 °
P(Kg/m2)=	120 m
PERFIL	
A(cm2)=	7.58E-04 m2
I(cm4)=	7.78E-07 m4

1. ESTADO MEMBRANA

EXPRESIÓN

1ER. TERMINO

n= 1

2DO.TERMINO

n= 3

$\alpha = (n \cdot \pi \cdot r) / L$	1.607902	4.823705
$k\phi = (-4p \cdot r^2) / (\alpha \cdot L)$	-993.127	-331.042
$k\phi_x = (-8p \cdot r^2) / (\alpha^2 \cdot L)$	-1235.307	-137.256
$kx = (-8p \cdot r^2) / (\alpha^3 \cdot L)$	-768.273	-28.455
$ku = (4p \cdot l) / [\text{raiz}(3) \cdot E \cdot A] (r^3/L \cdot 1/\alpha^2) (3/\alpha^2 - 1)$	2.97E-05	-1.79E-05
$k_v = (4p \cdot l) / [\text{raiz}(3) \cdot E \cdot A] (r^3/L \cdot 1/\alpha^3) (3/\alpha^2 + 7)$	-9.39E-04	-3.04E-05
$kw = (4p \cdot l) / [\text{raiz}(3) \cdot E \cdot A] (r^3/L \cdot 1/\alpha) (5/3 + (6/\alpha^2) + (3/\alpha^4))$	-1.32E-03	-1.91E-04

2. ESFUERZOS MEMBRANA

ϕ	0	10	20	30	40	45
Φ k- ϕ	45	35	25	15	5	0
sen (Φ k- ϕ)	0.707107	0.573576	0.422618	0.258819	0.087156	0
cos (Φ k- ϕ)	0.707107	0.819152	0.906308	0.965926	0.996195	1
$N\phi$ (sen $\alpha(x/r) = k \phi \cos(k-b)$)	-702.247 -234.082	-813.522 -271.174	-900.079 -300.026	-959.287 -319.762	-989.348 -329.782	-993.127 -331.042
$N\phi_x$ (cos $\alpha(x/r) = k \phi \sin(k-b)$)	-873.494 -97.055	-708.542 -78.727	-522.063 -58.007	-319.721 -35.524	-107.664 -11.963	0 0
N_x (sen $\alpha(x/r) = kx \cos(k-b)$)	-543.251 -20.121	-629.332 -23.309	-696.292 -25.789	-742.095 -27.485	-765.35 -28.347	-768.273 -28.455
$uE5$ (cos $\alpha(x/r) = ku \cos(k-b)$)	2.10 -1.27	2.43 -1.47	2.69 -1.62	2.87 -1.73	2.95 -1.78	2.97 -1.79
$vE5$ (sen $\alpha(x/r) = kv \sin(k-b)$)	-66.37 -2.15	-53.83 -1.74	-39.67 -1.28	-24.29 -0.79	-8.18 -0.26	0.00 0.00
$wE5$ (sen $\alpha(x/r) = kw \cos(k-b)$)	-93.28 -13.53	-108.06 -15.67	-119.55 -17.34	-127.42 -18.48	-131.41 -19.06	-131.91 -19.13

3. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE OCTAVO GRADO

NOTA: Un número entre paréntesis expresa el valor de la línea correspondiente al mismo.

EXPRESIÓN	PRIMER TÉRMINO n= 1	SEGUNDO TÉRMINO n= 3
$\beta = I/(A \cdot r^2)$	2.43E-05	2.43E-05
$C_6 = 2 - ((4/3)(3 - \beta) \cdot \alpha^2)$	-8.34	-91.07
$C_4 = (1 - (\alpha^2/3) \cdot (21 - 4 \cdot \beta) + ((\alpha^4/3) \cdot (1 - \beta)))$	23.75	3146.71
$C_0 = \alpha^4(1 + \beta)[(8/(9 \cdot \beta)) - ((20/27) \cdot \alpha^2)]$	2.45E+05	2.02E+07
(1) $C_4 - 0.25 \cdot (C_6^2)$	6.355	1073.19
(2) $C_0 - (0.25 \cdot (1)^2)$	244607.59	19875205
(3) $0.25 \cdot C_6$	-2.08533	-22.76794
(4) $(3)^2 - (1) \cdot 0.5$	1.1711	-18.21591
(5) $\text{RAÍZ}(2)$	494.578	4458.162
(6) $\text{RAÍZ}((4)^2 + (5)^2)$	494.579	4458.199
(7) $-(3) + (0.7071067812 \cdot \text{raíz}((4) + (5)))$	17.8294	69.8845
(8) $-(3) - (0.7071067812 \cdot \text{raíz}((4) + (5)))$	-13.6587	-24.3486
(9) $\text{raíz}((7)^2 + (0.7071067812 \cdot \text{raíz}(-(4) - (8))))$	23.761	84.392
(10) $\text{raíz}((9) + (7))$	6.4491	12.4208
(11) $\text{raíz}((9) - (7))$	2.4355	3.8089
a=0.70710678*(10)	4.5602	8.7828
b=0.70710678*(11)	1.7222	2.6933
(12) $\text{raíz}((8)^2 + (0.7071067812 \cdot \text{raíz}(-(4) - (8))))$	20.815	53.208
(13) $\text{Raíz}((12) + (8))$	2.67513	5.37209
(14) $\text{Raíz}((12) - (8))$	5.87143	8.80662
c=0.70710678*(13)	1.8916	3.7986
d=0.70710678*(14)	4.1517	6.2272

PRIMER TÉRMINO

Φ	0	10	20	30	40
$\phi 1 = e^{-a\varphi} \cos b\varphi + e^{-a\omega} \cos b\omega$	0.9992980	0.4296758	0.1659371	0.055019861	0.016194483
$\phi 2 = e^{-a\varphi} \sen b\varphi + e^{-a\omega} \sen b\omega$	0.000327434	0.134733682	0.1184080	0.080246734	0.057306123
$\phi 3 = e^{-c\varphi} \cos d\varphi + e^{-c\omega} \cos d\omega$	1.049787376	0.601234431	0.0974798	-0.25985081	-0.42921787
$\phi 4 = e^{-c\varphi} \sen d\varphi + e^{-c\omega} \sen d\omega$	0.012096125	0.443155406	0.4200927	0.177025918	-0.02459582
$\phi 5 = e^{-a\varphi} \cos b\varphi - e^{-a\omega} \cos b\omega$	1.0007020	0.4322172	0.1698059	0.058909281	0.013656947
$\phi 6 = e^{-a\varphi} \sen b\varphi - e^{-a\omega} \sen b\omega$	-0.0003274	0.13242442	0.1118537	0.063831973	0.020002652
$\phi 7 = e^{-c\varphi} \cos d\varphi - e^{-c\omega} \cos d\omega$	0.9502126	0.4752041	0.0276345	-0.16144551	-0.08903465
$\phi 8 = e^{-c\varphi} \sen d\varphi - e^{-c\omega} \sen d\omega$	-0.0120961	0.5097768	0.6057054	0.434775674	0.153145833

SEGUNDO TÉRMINO

Φ	0	10	20	30	40
$\phi 1 = e^{-a\varphi} \cos b\varphi + e^{-a\omega} \cos b\omega$	0.9999995	0.1924870	0.027467	0.0015133	-0.0009915
$\phi 2 = e^{-a\varphi} \sen b\varphi + e^{-a\omega} \sen b\omega$	-0.0000009	0.0977928	0.037646	0.0099674	0.0024038
$\phi 3 = e^{-c\varphi} \cos d\varphi + e^{-c\omega} \cos d\omega$	0.9975992	0.2360540	-0.14823	-0.1176741	-0.0011565
$\phi 4 = e^{-c\varphi} \sen d\varphi + e^{-c\omega} \sen d\omega$	-0.0008952	0.4594527	0.228085	-0.0118282	-0.0931431
$\phi 5 = e^{-a\varphi} \cos b\varphi - e^{-a\omega} \cos b\omega$	1.0000005	0.1924947	0.027510	0.0017055	-0.0003322
$\phi 6 = e^{-a\varphi} \sen b\varphi - e^{-a\omega} \sen b\omega$	0.0000009	0.0977983	0.037653	0.0099035	0.0017360
$\phi 7 = e^{-c\varphi} \cos d\varphi - e^{-c\omega} \cos d\omega$	1.0024008	0.2434649	-0.15293	-0.1540686	-0.0491795
$\phi 8 = e^{-c\varphi} \sen d\varphi - e^{-c\omega} \sen d\omega$	0.0008952	0.4528214	0.209368	-0.0206553	-0.0385971



4. COEFICIENTES DE LOS ESFUERZOS Y RECORRIDOS

(15) a	4.5602	8.7828
(16) b	1.7222	2.6933
(17) c	1.8916	3.7986
(18) d	4.1517	6.2272
(19) a^2+b^2	23.761397	84.391441
(20) a^2-b^2	17.829451	69.883711
(21) c^2+d^2	20.814763	53.207382
(22) c^2-d^2	-13.65846	-24.34866
(23) ab	7.8535764	23.654715
(24) cd	7.8533557	23.654642
(25) $\alpha\beta$	3.91E-05	1.17E-04
(26) a^2-b^2+1	18.829451	70.883711
(27) c^2-d^2+1	-12.65846	-23.34866
(28) $3(a^2-b^2)-(10\alpha^2)$	27.634865	-23.03017
(29) $3(c^2-d^2)-(10\alpha^2)$	-66.82888	-305.7273
(30) $\beta\alpha ab$	3.07E-04	2.77E-03
(31) $\beta\alpha cd$	3.07E-04	2.77E-03
(32) $20\beta\alpha^2+21$	21.00	21.01
(33) $8\beta\alpha^2+3$	3.00	3.00
(34) $m1=6*ab*(33)$	141.38805	426.42668
(35) $n1=\alpha^2*(32)-3*(20)*(33)$	-106.1964	-141.0077
(36) $p1=(30)*[108*(20)-126*(\alpha^2)+54]$	0.5073419	12.943957
(37) $q1=27*(25)(20)(26)+30(25)(\alpha^2[(\alpha^2-1)+9(\alpha)-108(30)(23)-63(25)(\alpha^2)(20)]$	14.46	41.82
(38) $m2=6*(22)(33)$	141.38408	426.42536
(39) $n2=(\alpha^2)(32)-3*(22)(33)$	177.24232	708.36202
(40) $p2=(31)*[108*(22)-126*(\alpha^2)+54]$	-0.535869	-15.26619
(41) $q2=(27*(25)*(22)*(27))+30*(25)*\alpha^2[\alpha^2-1]+9*\alpha-(108*(31)(24)-(63*(25)*(\alpha^2)(22))$	14.34	39.09

(42) $m1^2+n1^2$	31268.249	201722.88
(43) $m2^2+n2^2$	51404.298	683615.33
(44) $K1=((m1*p1)-(n1*q1))/(m1^2+n1^2)$	0.0513922	0.0565967
(45) $K2=((n1*p1)+(m1*q1))/(m1^2+n1^2)$	0.0636453	0.0793602
(46) $K3=((m2*p2)-(n2*q2))/(m2^2+n2^2)$	-0.050932	-0.050023
(47) $K4=((n2*p2)+(m2*q2))/(m2^2+n2^2)$	0.0379784	0.0148577
(48) $K5=[K1*(28)+6(K2)(23)](1/alfa)/9+(2/3)$	0.9720527	0.8960897
(49) $K6=[K2*(28)-6(K1)(23)](1/alfa)/9$	-0.0458	-0.227127
(50) $K7=[K3*(29)+6(K4)(24)](1/alfa)/9+(2/3)$	1.0255395	1.0675116
(51) $K8=[K4*(29)-6(K3)(24)](1/alfa)/9$	-0.009545	0.0589034
(52) $K9=[(K5*a)-(b*K6)]/(a^2-b^2)$	0.1898723	0.1005066
(53) $K10=[(K6*a)+(b*K5)]/(a^2-b^2)$	0.0616635	0.0049606
(54) $K11=[(K7*c)-(d*K8)]/(c^2+d^2)$	0.1040948	-0.017214
(54) $K12=[(K8*c)+(d*K7)]/(c^2+d^2)$	0.2036861	0.129143
(55) $K13=3[1-k5]-(5*alfa*K1)$	-0.329326	-1.053299
(56) $K14=-3(K6)-(5*alfa*K2)$	-0.374277	-1.23267
(57) $K15=3[1-K7]-(5*alfa*K3)$	0.3328514	1.0039381
(58) $K16=(-3*K8)-(5*alfa*K4)$	-0.276694	-0.535057
(59) $K17=K13+4*alfa*K1$	0.0012082	0.0387249
(60) $K18=K14+4*alfa*K2$	0.0350647	0.29857
(61) $K19=K15+4*alfa*K3$	0.0052755	0.0387597
(62) $K20=K16+4*alfa*K4$	-0.032431	-0.24838
(63) $K21=alfa*K9-a*k1-b*k2$	-0.038673	-0.226004
(64) $K22=alfa*K10-a*k2+b*k1$	-0.102579	-0.520644
(65) $K23=alfa*K11-c*k3-d*k4$	0.1060425	0.0144601
(66) $K24=alfa*K12-c*k4+d*k3$	0.0734888	0.3404094
(67) $K25=3*(26)-(5*alfa^2)$	43.561609	96.310483
(68) $K26=-6*(23)$	-47.12146	-141.9283
(69) $K27=3*(27)-(5*alfa)$	-50.90213	-186.3866

(70) $K_{28} = -6 \cdot ab$	-47.12146	-141.9283
(71) $K_{29} = (k_{25}) + (4 \cdot \alpha^2)$	53.903005	189.383
(72) $K_{30} = k_{26}$	-47.12146	-141.9283
(73) $K_{31} = (K_{27}) + (4 \cdot \alpha^2)$	-40.56074	-93.3141
(74) $K_{32} = K_{28}$	-47.12146	-141.9283
(75) $K_{33} = (-a \cdot K_1) - (b \cdot K_2) - (\alpha \cdot K_9 - (2 \cdot \alpha \cdot a))$	-15.31397	-85.92691
(76) $K_{34} = (-a \cdot K_2) + (b \cdot K_1) - (\alpha \cdot k_{10}) + (2 \cdot \alpha \cdot b)$	5.2373809	25.414868
(77) $K_{35} = (-c \cdot K_3) - (d \cdot K_4) - (\alpha \cdot k_{11}) - (2 \cdot \alpha \cdot c)$	-6.311721	-36.46612
(78) $K_{36} = (-c \cdot K_4) + (d \cdot K_3) - (\alpha \cdot k_{12}) + (2 \cdot \alpha \cdot d)$	12.740251	59.085464
(79) $K_{37} = (-a \cdot K_{29}) - (b \cdot K_{30}) - (2 \cdot \alpha \cdot k_{33})$	-115.4092	-452.0855
(80) $K_{38} = (-a \cdot K_{30}) + (b \cdot K_{29}) - (2 \cdot \alpha \cdot k_{34})$	290.87264	1511.4054
(81) $K_{39} = (-c \cdot K_{31}) - (d \cdot K_{32}) - (2 \cdot \alpha \cdot k_{35})$	292.65611	1590.0825
(82) $K_{40} = (-c \cdot K_{32}) + (d \cdot K_{31}) - (2 \cdot \alpha \cdot k_{36})$	-120.2312	-611.9785
(83) $K_{41} = -k_9 - a$	-4.750072	-8.883307
(84) $K_{42} = -k_{10} + b$	1.6605365	2.6883394
(85) $K_{43} = -k_{11} - c$	-1.995695	-3.781386
(86) $K_{44} = -k_{12} + d$	3.9480139	6.098057
(87) $K_{45} = K_{37} + (\alpha \cdot K_{33})$	-140.0325	-866.5715
(88) $K_{46} = K_{38} + (\alpha \cdot K_{34})$	299.29384	1633.9992
(89) $K_{47} = K_{39} + (\alpha \cdot K_{35})$	282.50748	1414.1806
(90) $K_{48} = K_{40} + (\alpha \cdot K_{36})$	-99.74613	-326.9676
(91) $K_{49} = (2/3 \cdot \alpha) \cdot (K_{25}) - (a \cdot K_{33}) - (b \cdot K_{34})$	107.51017	995.94453
(92) $K_{50} = (2/3 \cdot \alpha) \cdot (K_{26}) - (a \cdot K_{34}) - (b \cdot K_{33})$	-100.7684	-911.0541
(93) $K_{51} = (2/3 \cdot \alpha) \cdot (K_{27}) - (c \cdot K_{35}) - (d \cdot K_{36})$	-95.51821	-828.7995
(94) $K_{52} = (2/3 \cdot \alpha) \cdot (K_{28}) - (c \cdot K_{36}) + (d \cdot K_{35})$	-100.815	-907.9374

Primer término.

$$N_x = (3.809\phi_1 - 6.257\phi_2 + 7.331\phi_3 - 2.047\phi_4 + N_{xm}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_\phi = (108,2\phi_1 + 765,9\phi_2 + 796,6\phi_3 + 561,9\phi_4 + N_{\phi m}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_{\phi x} = (446\phi_5 - 2.375\phi_6 + 415\phi_7 - 2.650\phi_8 + N_{\phi xm}) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_x = (-118,5\phi_1 - 90,0\phi_2 + 29,6\phi_3 + 190,0\phi_4) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_\phi = (-213,2\phi_1 - 128,8\phi_2 + 68,4\phi_3 + 249,3\phi_4) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_{\phi x} = (55,6\phi_5 + 8,7\phi_6 - 58,5\phi_7 - 7,8\phi_8) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_x = (-66,0\phi_1 - 43,1\phi_2 + 19,3\phi_3 + 86,7\phi_4) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_\phi = (100,7\phi_5 + 144,7\phi_6 + 153,8\phi_7 - 114,3\phi_8) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$v = (-0,00465\phi_5 + 0,00247\phi_6 - 0,00367\phi_7 - 0,00608\phi_8 + v_m) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$w = (-0,02597\phi_1 + 0,000001\phi_2 + 0,01848\phi_3 - 0,000316\phi_4 + w_m) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r}$$

Segundo término.

$$N_x = (199\phi_1 - 778\phi_2 + 733\phi_3 - 248\phi_4 + N_{xm}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_\phi = (50\phi_1 + 225\phi_2 + 240\phi_3 + 241\phi_4 + N_{\phi m}) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$N_{\phi x} = (-15\phi_5 - 426\phi_6 + 112\phi_7 - 449\phi_8 + N_{\phi xm}) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_x = (-11,7\phi_1 - 6,8\phi_2 - 2,1\phi_3 + 23,8\phi_4) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_{\varphi} = (-27,5\phi_1 - 5,5\phi_2 + 6,3\phi_3 + 25,2\phi_4) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$M_{\varphi x} = (10,5\phi_5 - 1,7\phi_6 - 10,5\phi_7 - 1,9\phi_8) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_x = (-23,6\phi_1 - 7,2\phi_2 + 2,6\phi_3 + 28,8\phi_4) \text{Cos}\alpha \frac{x}{r};$$

$$Q_{\varphi} = (27,1\phi_5 + 20,1\phi_6 + 28,2\phi_7 - 19,3\phi_8) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$v = (-0,000079\phi_5 + 0,000043\phi_6 - 0,000063\phi_7 - 0,000163\phi_8 + v_m) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

$$w = (-0,000812\phi_1 + 0,000388\phi_2 + 0,000784\phi_3 - 0,000854\phi_4 + w_m) \text{Sen}\alpha \frac{x}{r};$$

De estas expresiones se sacan los esfuerzos y recorridos en cualquier punto de la lámina, cuyos valores vendrán dados para las abcisas unitarias x/L y para φ .

Nx (Kg. Por m)

ϕ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	4113.20	7289.70	9125.09	9863.30	10024.00
10	0	1130.60	2151.80	2964.20	3486.80	3667.20
20	0	-467.54	-762.96	-835.30	-777.60	-735.52
30	0	-1116.10	-2053.30	-2707.80	-3070.90	-3183.70
40	0	-1291.60	-2452.06	-3366.82	-3950.10	-4150.34

N ϕ x(Kg. Por m)

ϕ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
10	-2301.60	-2073.61	-1506.94	-864.09	-356.11	0
20	-2491.20	-2301.89	-1807.95	-1178.69	-562.35	0
30	-1712.00	-1610.77	-1331.60	-932.79	-475.70	0
40	-592.70	-563.42	-478.53	-347.07	-182.19	0

N ϕ (Kg. Por m)

ϕ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	121.60	198.90	218.63	204.60	194.10
10	0	-38.60	-30.90	29.60	103.40	136.30
20	0	-366.67	-538.34	-470.20	-295.23	-206.91
30	0	-590.80	-918.90	-916.20	-745.60	-650.90
40	0	-686.29	-1098.59	-1160.08	-1028.89	-947.38

Mx (m.Kg. Por m)

ϕ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-37.50	-63.10	-73.10	-72.81	-71.26
10	0	18.10	30.10	33.81	32.65	31.43
20	0	20.38	35.71	43.98	46.79	47.22
30	0	3.70	7.10	9.87	11.70	12.32
40	0	-9.40	-16.51	-20.47	-21.95	-22.24

M ϕ (m.Kg. Por m)

ϕ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-59.91	-101.47	-118.42	-119.02	-117.03
10	0	19.03	31.94	36.74	36.30	35.41
20	0	21.90	39.38	50.35	55.54	56.92
30	0	0.41	1.44	3.12	4.75	5.43
40	0	-16.20	-29.46	-38.19	-42.67	-43.98

M ϕ x (m.Kg. Por m)

ϕ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	0	0	0	0	0
10	-8.20	-7.19	-4.85	-2.38	-0.78	0
20	5.5	4.71	2.86	1.03	0.10	0
30	11.5	10.37	7.50	4.23	1.75	0
40	5.50	5.05	3.82	2.36	1.06	0

φ	Qx (Kg. Por m)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	-65.7	-54.9	-29.6	-6.3	3.2	0
10	24.5	20.1	10.2	1.1	-2.1	0
20	27.5	24.3	16.4	8.1	2.6	0
30	2.5	2.6	2.8	2.6	1.6	0
40	-16.6	-14.9	-10.5	-5.7	-2.1	0

φ	Q φ (Kg. Por m)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	121.50	198.50	217.90	203.60	192.80
10	0	28.30	50.60	64.30	70.60	72.20
20	0	-15.34	-25.12	-27.70	-26.07	-24.85
30	0	-21.30	-38.40	-49.10	-54.30	-55.70
40	0	-8.80	-16.39	-21.99	-25.24	-28.28

φ	v (en mm)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-2.80	-5.33	-7.11	-8.30	-8.53
10	0	-2.38	-4.20	-5.62	-6.72	-6.86
20	0	-1.50	-2.66	-3.60	-4.46	-4.59
30	0	-0.64	-1.22	-1.95	-2.29	-2.41
40	0	-0.02	-0.41	-0.57	-0.67	-0.73

φ	w (en mm)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-2.41	-4.60	-6.11	-7.02	-7.29
10	0	-0.49	-0.85	-1.03	-1.11	-1.07
20	0	0.51	0.86	1.07	1.03	1.02
30	0	-2.44	-4.64	-6.22	-7.09	-7.36
40	0	-3.14	-5.86	-7.87	-9.07	-9.47

RESULTADOS**ESFUERZOS****(Kg.)**

Na	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	89.16	145.84	160.31	150.02	142.32
10	-2923.03	-2661.79	-1936.47	-1075.7	-376.45	99.94
20	-3163.82	-3192.25	-2690.83	-1841.7	-930.66	-151.71
30	-2174.24	-2478.87	-2364.9	-1856.43	-1150.84	-477.26
40	-752.73	-1218.75	-1413.25	-1291.39	-985.8	-694.66

Nb	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	89.16	145.84	160.31	150.02	142.32
10	2923.03	2605.18	1891.16	1119.1	528.08	99.94
20	3163.82	2654.54	1901.37	1152.17	497.71	-151.71
30	2174.24	1612.48	1017.36	512.85	57.44	-477.26
40	752.73	212.33	-197.79	-409.83	-523.03	-694.66

Nc	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	3359.50	5958.50	7467.07	8079.87	8215.32
10	0	1257.64	2377.99	3249.33	3797.06	3983.41
20	0	-379.8	-641.78	-746.32	-747.01	-733.11
30	0	-1010.95	-1921.44	-2642.29	-3104.19	-3262.97
40	0	-1168.97	-2294.14	-3277.7	-3967.32	-4217.43

MOMENTOS FLECTORES**(Kg.m)**

Ma	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-43.93	-74.4	-86.83	-87.27	-85.81
10	-10.41	4.82	17.27	23.91	25.63	25.96
20	6.99	22.04	32.51	38.23	40.85	41.74
30	14.61	13.47	10.58	7.66	5.71	3.98
40	6.99	-5.46	-16.75	-25.01	-29.95	-32.25

Mb	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-43.93	-74.4	-86.83	-87.27	-85.81
10	10.41	23.08	29.58	29.96	27.6	25.96
20	-6.99	10.07	25.24	35.62	40.59	41.74
30	-14.61	-12.88	-8.47	-3.09	1.26	3.98
40	-6.99	-18.3	-26.45	-31	-32.63	-32.25

Mc	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0	-14.46	-24.15	-27.73	-27.33	-26.6
10	0	12.93	21.39	23.72	22.6	21.59
20	0	14.39	24.84	29.94	31.1	31.07
30	0	3.92	7.28	9.71	11.13	11.56
40	0	-4.39	-7.36	-8.51	-8.5	-8.34

CLC:	Cubiertas Laminas Cilíndricas
Archivo:	C:\CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS\PRUEBA.ymv
Autor:	Yul Vásquez Ordóñez.
Unidades:	Kg.m
Fecha:	10/10/00

Esfuerzo unitario normal en una sección transversal						
Nx (Kg. Por m)						

φ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	4113.20	7289.70	9125.09	9863.30	10024.00
10	0	1130.60	2151.80	2964.20	3486.80	3667.20
20	0	-467.54	-762.96	-835.30	-777.60	-735.52
30	0	-1116.10	-2053.30	-2707.80	-3070.90	-3183.70
40	0	-1291.60	-2452.06	-3366.82	-3950.10	-4150.34

Esfuerzo unitario tangencial en el plano						
Nφx(Kg. Por m)						

φ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0
10	-2301.60	-2073.61	-1506.94	-864.09	-356.11	0
20	-2491.20	-2301.89	-1807.95	-1178.69	-562.35	0
30	-1712.00	-1610.77	-1331.60	-932.79	-475.70	0
40	-592.70	-563.42	-478.53	-347.07	-182.19	0

Esfuerzo unitario normal en una sección longitudinal						
Nφ(Kg. Por m)						

φ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	121.60	198.90	218.63	204.60	194.10
10	0	-38.60	-30.90	29.60	103.40	136.30
20	0	-366.67	-538.34	-470.20	-295.23	-206.91
30	0	-590.80	-918.90	-916.20	-745.60	-650.90
40	0	-686.29	-1098.59	-1160.08	-1028.89	-947.38

Momento unitario de flexión en una sección transversal						
Mx (m.Kg. Por m)						

φ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-37.50	-63.10	-73.10	-72.81	-71.26
10	0	18.10	30.10	33.81	32.65	31.43
20	0	20.38	35.71	43.98	46.79	47.22
30	0	3.70	7.10	9.87	11.70	12.32
40	0	-9.40	-16.51	-20.47	-21.95	-22.24

Momento unitario de flexión en una sección longitudinal						
Mφ(m.Kg. Por m)						

φ	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-59.91	-101.47	-118.42	-119.02	-117.03
10	0	19.03	31.94	36.74	36.30	35.41
20	0	21.90	39.38	50.35	55.54	56.92
30	0	0.41	1.44	3.12	4.75	5.43
40	0	-16.20	-29.46	-38.19	-42.67	-43.98

CLC:	Cubiertas Laminas Cilíndricas
Archivo:	C:\CUBIERTAS LAMINARES CILINDRICAS\PRUEBA.ymv
Autor:	Yul Vásquez Ordóñez.
Unidades:	Kg.m
Fecha:	10/10/00

Página 2

Momento unitario de torsión de la lámina

ϕ	$M_{\phi x}$ (m.Kg. Por m)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	0	0	0	0	0
10	-8.20	-7.19	-4.85	-2.38	-0.78	0
20	5.5	4.71	2.86	1.03	0.10	0
30	11.5	10.37	7.50	4.23	1.75	0
40	5.50	5.05	3.82	2.36	1.06	0

Esfuerzo cortante unitario radial en una sección transversal

ϕ	Q_x (Kg. Por m)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	-65.7	-54.9	-29.6	-6.3	3.2	0
10	24.5	20.1	10.2	1.1	-2.1	0
20	27.5	24.3	16.4	8.1	2.6	0
30	2.5	2.6	2.8	2.6	1.6	0
40	-16.6	-14.9	-10.5	-5.7	-2.1	0

Esfuerzo cortante unitario radial en una sección longitudinal

ϕ	Q_{ϕ} (Kg. Por m)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	121.50	198.50	217.90	203.60	192.80
10	0	28.30	50.60	64.30	70.60	72.20
20	0	-15.34	-25.12	-27.70	-26.07	-24.85
30	0	-21.30	-38.40	-49.10	-54.30	-55.70
40	0	-8.80	-16.39	-21.99	-25.24	-26.28

Corrimiento transversal

ϕ	v (en mm)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-2.80	-5.33	-7.11	-8.30	-8.53
10	0	-2.38	-4.20	-5.62	-6.72	-6.86
20	0	-1.50	-2.66	-3.60	-4.46	-4.59
30	0	-0.64	-1.22	-1.95	-2.29	-2.41
40	0	-0.02	-0.41	-0.57	-0.67	-0.73

Corrimiento radial

ϕ	w (en mm)					
	x/L					
	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-2.41	-4.60	-6.11	-7.02	-7.29
10	0	-0.49	-0.85	-1.03	-1.11	-1.07
20	0	0.51	0.86	1.07	1.03	1.02
30	0	-2.44	-4.64	-6.22	-7.09	-7.36
40	0	-3.14	-5.86	-7.87	-9.07	-9.47

CLC:	Cubiertas Laminas Cilíndricas
Archivo:	C:\CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS\PRUEBA.ymv
Autor:	Yul Vásquez Ordóñez.
Unidades:	Kg.m
Fecha:	10/10/00

RESULTADOS

ESFUERZOS

(Kg.)

Página 3

Esfuerzo Normal en las barras diagonales

Na	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	89.16	145.84	160.31	150.02	142.32
10	-2923.03	-2661.79	-1936.47	-1075.7	-376.45	99.94
20	-3163.82	-3192.25	-2690.83	-1841.7	-930.66	-151.71
30	-2174.24	-2478.87	-2364.9	-1856.43	-1150.84	-477.26
40	-752.73	-1218.75	-1413.25	-1291.39	-985.8	-694.66

Esfuerzo Normal en las barras diagonales

Nb	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	89.16	145.84	160.31	150.02	142.32
10	2923.03	2605.18	1891.16	1119.1	528.08	99.94
20	3163.82	2654.54	1901.37	1152.17	497.71	-151.71
30	2174.24	1612.48	1017.36	512.85	57.44	-477.26
40	752.73	212.33	-197.79	-409.83	-523.03	-694.66

Esfuerzo Normal en las barras longitudinales

Nc	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	3359.50	5958.50	7467.07	8079.87	8215.32
10	0	1257.64	2377.99	3249.33	3797.06	3983.41
20	0	-379.8	-641.78	-746.32	-747.01	-733.11
30	0	-1010.95	-1921.44	-2642.29	-3104.19	-3262.97
40	0	-1168.97	-2294.14	-3277.7	-3967.32	-4217.43

MOMENTOS FLECTORES

(Kg.m)

Momento de flexión en las barras diagonales

Ma	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-43.93	-74.4	-86.83	-87.27	-85.81
10	-10.41	4.82	17.27	23.91	25.63	25.96
20	6.99	22.04	32.51	38.23	40.85	41.74
30	14.61	13.47	10.58	7.66	5.71	3.98
40	6.99	-5.46	-16.75	-25.01	-29.95	-32.25

Momento de flexión en las barras diagonales

Mb	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0	0	-43.93	-74.4	-86.83	-87.27	-85.81
10	10.41	23.08	29.58	29.96	27.6	25.96
20	-6.99	10.07	25.24	35.62	40.59	41.74
30	-14.61	-12.88	-8.47	-3.09	1.26	3.98
40	-6.99	-18.3	-26.45	-31	-32.63	-32.25

Momento de flexión en las barras longitudinales

Mc	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0	-14.46	-24.15	-27.73	-27.33	-26.6
10	0	12.93	21.39	23.72	22.6	21.59
20	0	14.39	24.84	29.91	31.1	31.07
30	0	3.92	7.28	9.71	11.13	11.56
40	0	-4.39	-7.36	-8.51	-8.5	-8.34

7.8 MANUAL DEL USUARIO.

7.8.1 Descripción y manejo del paquete computacional.

Bienvenido a **CLC**, un programa con eficientes rutinas para el análisis de cubiertas laminas cilíndricas, basado en la teoría del Estado Membrana. Totalmente integrado al ambiente Windows, provee una interfase de usuario totalmente gráfica y fácil de usar, logrando así hacer más productivo y eficiente su trabajo. Es necesario que usted sepa su funcionamiento para lograr el mejor aprovechamiento posible al programa.

El manual tiene la finalidad de darle los conocimientos esenciales sobre el ambiente antes de empezar a introducir un ejemplo básico. Se presentará a continuación una descripción general del programa **CLC**, más las herramientas que dispone para su buen funcionamiento.

CLC es una herramienta muy útil para el análisis de cubiertas laminas cilíndricas, sin embargo, no es una herramienta de análisis automático y debe ser usado con el juicio y criterio de un profesional calificado de ingeniería en estructuras.

Elementos del paquete de instalación

Su paquete **CLC** incluye lo siguiente:

- Disco compacto (CD), que contiene el programa de instalación (Setup), archivos ejecutables y demás información necesaria para su correcto funcionamiento.
- El paquete de base de datos de la Perfilera IPAC.

Requerimientos del Sistema

CLC trabajará en cualquier computadora personal basada en Windows, IBM-compatible, las características mínimas deben cumplir con por lo menos la configuración siguiente:

- Intel Pentium, o procesador compatible PC 200MMX.
- Un mínimo de 32 Mb. de memoria Ram.
- Por los menos 80 MB de espacio libre en el disco duro. Los archivos del programa requieren aproximadamente 18 MB. El resto se necesita para archivar proyectos de magnitud que puedan requerir mucho más espacio del disco.
- Microsoft Windows – compatible.
- Una tarjeta gráfica de por lo menos 2MB.
- Resolución a 256 colores y 640 x 480.
- Mouse o cualquier dispositivo similar.
- Unidad de CD para instalación similar.

Proceso de Instalación

Para dejar instalado **CLC** en su sistema:

- Encienda su computadora e inicie Windows 95/98
- Cerciórese que ninguna otra aplicación este en funcionamiento.
- Explore el CD de instalación en busca de setup.exe
- Una vez localizado haga doble click sobre el mismo.
- Recibirá varios mensajes indicando que los archivos de instalación se están copiando en su sistema.
- Seguidamente aparece un mensaje de bienvenida para luego preguntar por el directorio de instalación donde se alojarán tanto el programa como los archivos de soporte.
- Luego de esto el setup se encarga de:
 - a) Copiar archivos de archivos en su carpeta Windows.
 - b) Colocar **CLC.exe** en el menú inicio.

Eliminado CLC de su computador

Si usted desea eliminar CLC de su sistema, en el menú inicio de windows seleccione configuración > Panel de control> Agregar o quitar programas, click en CLC y luego en el botón Agregar o Quitar.

7.8.2 UNIDADES DE TRABAJO

Para mayor facilidad de ejecución del sistema, se recomienda grabar los archivos ejecutables en el disco duro (Unidad C), en un directorio llamado CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS.

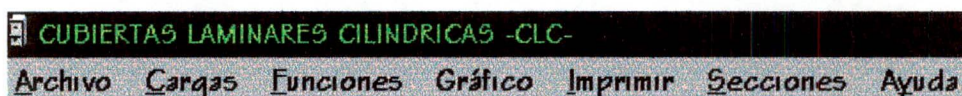
Las unidades en la que se puede guardar los archivos que genere la ejecución del programa serán “ A” (en la raíz del disquete) o “C” (en el directorio C: \CUBIERTAS LAMINARES CILÍNDRICAS).

7.8.3 DESCRIPCIÓN DE CADA UNA DE LAS OPCIONES A ELEGIR.

Barra de Herramientas

La interfase gráfica de usuario se usa para desplegar y analizar su estructura. Esta sección le introduce a usted en los conceptos básicos de interfase.

Cuando usted inicia el programa, este presenta una interfase sencilla dividida en dos bloques, uno de datos y otro gráfico. En la barra de menús aparece lo siguiente:



De igual forma los botones de órdenes siguientes:

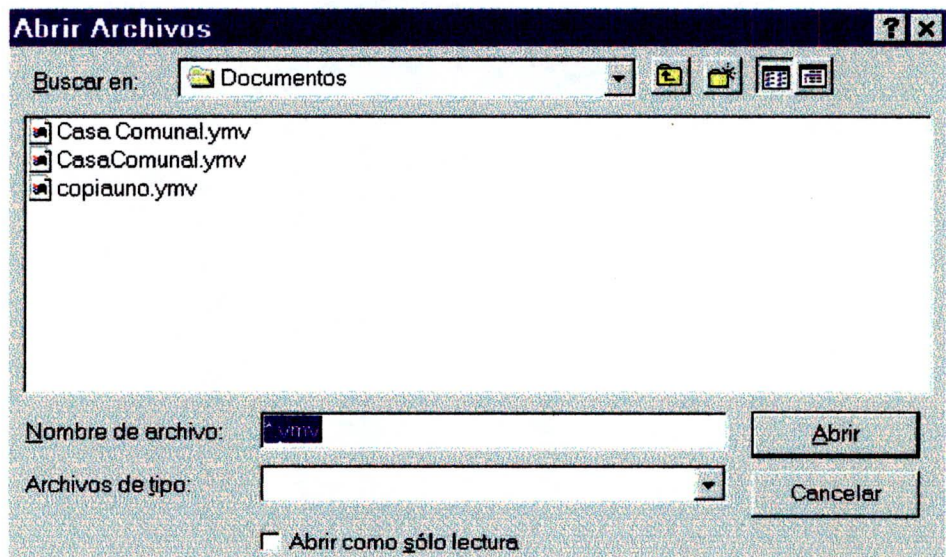


La función de cada uno es la siguiente:



Presenta el cuadro de diálogo abrir, permitiendo recuperar diseños realizados por el programa. [extensión: *. Ymv].

También mediante Archivo/abrir se puede acceder a los archivos*.Yv del programa, luego se selecciona el archivo requerido de la lista seleccionando abrir.



Permite guardar los cambios realizados en el proceso de análisis para posteriormente ser utilizados por el usuario.





Nos permite añadir un nuevo caso de carga (combinación de carga o condición de carga), y se presenta el siguiente cuadro:

Nuevo estado de carga

Identificador de la carga

Descripción de la condición de carga

Nota.- El identificador debe tener dos caracteres (Ej: pp, sc, vx, etc.)

☐ Es combinación de cargas

Ejemplos:
Peso Propio
Sobrecarga
Viento en X

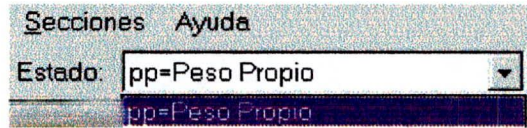
OK Cancelar



Al dar click sobre esta herramienta se edita los diferentes estados de carga.

Le permitirá editar estados de carga y combinaciones.

CLC le exige al ingeniero que especifique todos casos aplicados de carga (cargas de servicio) y las combinaciones de carga (factoriza x casos de carga) eso debe ser considerado para el análisis. Es la responsabilidad de los ingenieros para proporcionar las cargas y combinaciones que adecuadamente satisfacen las provisiones del código ecuatoriano.



Esta ventana muestra la condición de carga actual. Cualquier cosa que usted ve en la pantalla se relaciona a la condición de carga mostrada en esta ventana: es decir, despliegue de carga, doblando despliegue del momento, la parcela deformada, etc., es para la condición de carga actual.



Permite borrar un estado de carga.



Nos presenta el subprograma que nos muestra una base de datos de Perfilaría Nacional IPAC.



Nos brinda información sobre las características del material.

Área de Menús

Menú Archivo

A continuación se presenta una breve descripción de cómo trabajan los distintos menús del programa:



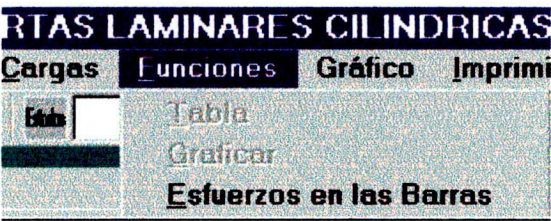
Menú	Submenú	Descripción
Nuevo		Abre archivo *. ymv
Abrir		Abre archivos *. ymv que corresponden formato del programa
Gravar		Permite guardar los cambios realizados en el proceso de análisis para que el usuario pueda retomarlos nuevamente cuando lo requiera. La extensión es: . Ymv. Cuando se activa por primera vez pide el nombre del archivo, en posteriores ocasiones archiva directamente al disco.
Guardar como		Permite guardar un análisis con otro nombre.
Salir		Para abandonar la aplicación.

Menú Cargas



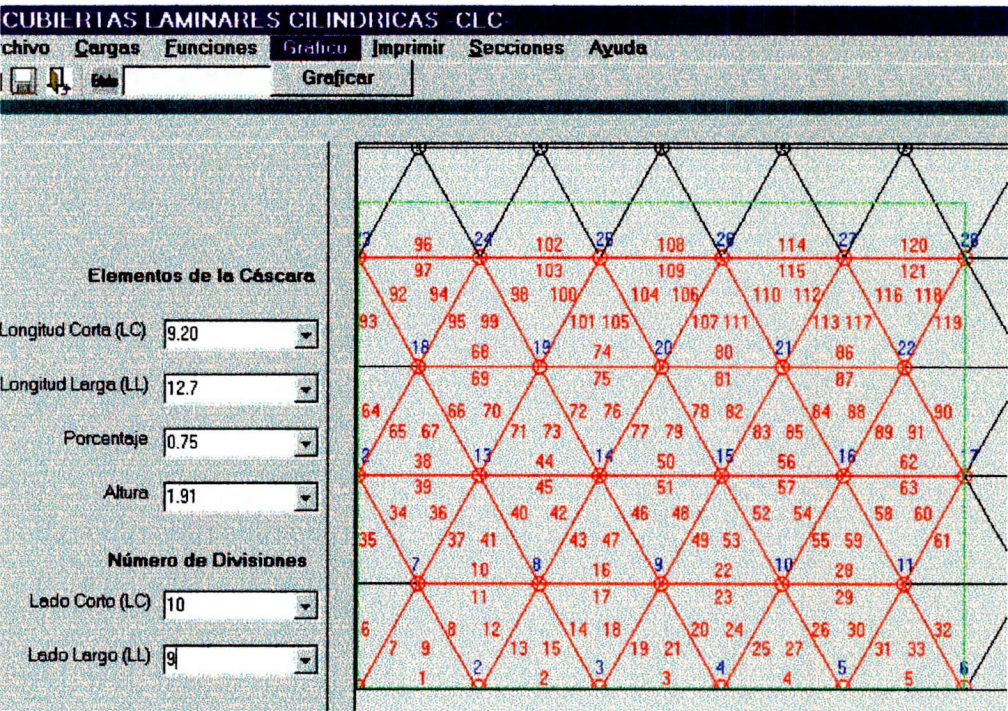
Menú	Submenú	Descripción
Agregar Estado de carga		Permite añadir un nuevo estado de carga
Borrar Estado de carga		Borra un estado o combinación de carga
Editar Estado de carga		Edita los diferentes estados de carga

Menú Funciones



Menú	Submenú	Descripción
Tabla		Presentará valores de esfuerzo del estado membrana
Análisis		Calculará la estructura laminar
Esfuerzos en las Barras		Resultados de las barras

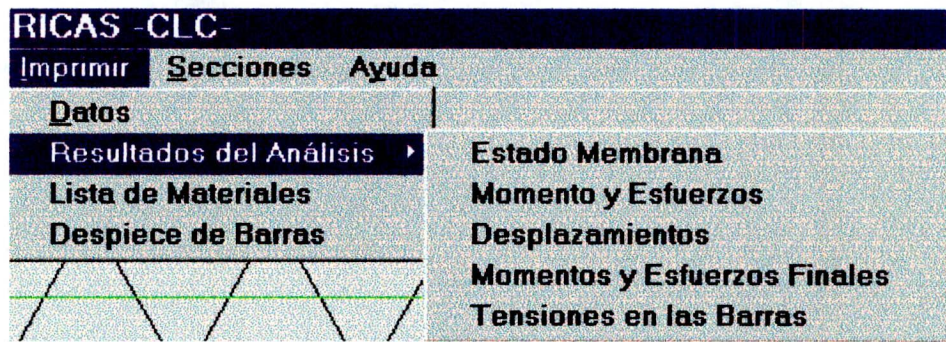
Menú Gráfico



Con la activación del menú gráfico, podemos visualizar una pantalla que se denomina **Elementos de la cáscara**, que es la genera el gráfico de la

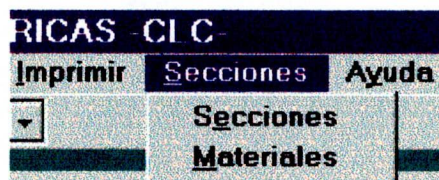
estructura laminar en planta, teniendo la entrada de datos, tales como:
Longitud larga de la cáscara, longitud corta, número de divisiones, etc.

Menú Imprimir



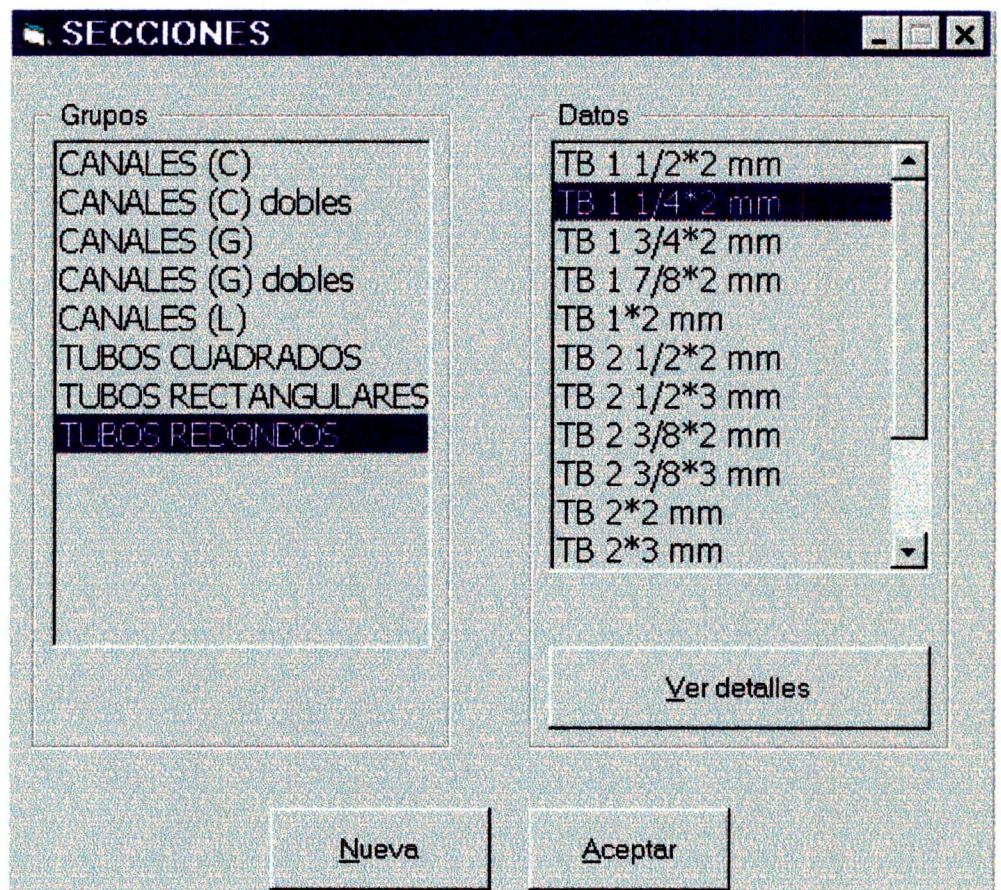
Menú	Submenú	Descripción
Datos		Presenta los datos de la estructura laminar
Resultados del Análisis	Estado Membrana Desplazamientos Momentos Finales Tensiones en las barras	Presenta el formulario de resultados del análisis.
Lista de Materiales		Tipo de material utilizado, y el peso total.
Despiece de Barras		Indica los diferentes tipos de barras y medidas pertenecientes a la estructura

Menú Secciones



CLC viene con una sección base de datos completo. Esas secciones perfiles y materiales están disponibles en la base de datos, donde constan perfiles estructurales IPAC – A36.

Visualizaremos el perfil y el material a usar, pudiendo editar y conocer sus características a continuación:



Podemos ver que tenemos los diferentes grupos de perfil nacional, conociendo sus datos (dimensiones), con la opción **Ver detalles**, permitiendo visualizamos y buscar características del perfil.

Datos de la SECCION

Nombre de la SECCION

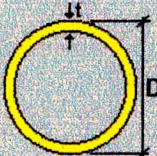
TB 1*2 mm

Unidades

☐ m

☒ mm

Icono



Detalles

(d) Diámetro	25.4
(e) Espesor	2

Material

Para crear su propio material, siga estos pasos:

-CLC-

Secciones

Ayuda

Secciones

Materiales

Ejecute orden Secciones / materiales.

Materiales

Materiales

A36

Nuevo

Editar

Cerrar

Presione el botón Nuevo

Detalle del Material

Nombre del Material

A36

Módulo de Elasticidad (Kg / cm2)

2038891.10

Coefficiente de Poisson

3

Peso Especifico (Kg / cm3)

0.0078

Coefficiente de Dilatación Térmica (1 / °C)

1e-5

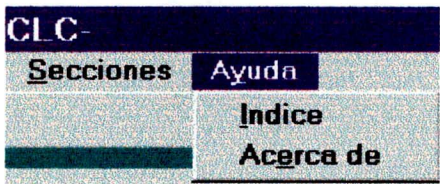
Tensión de Fluencia del Acero Fy (Kg / cm2)

2531.0373

Acero

Entre las propiedades del material y entonces habremos creado el nuevo material.

Menú Ayuda



Despliega un novedoso sistema de ayuda en línea basado en lenguaje HTML y que es el estándar en los sistemas Windows 98. De ahí que para

desplegarlo en Windows 95, debamos tener instalado el Internet Explorer 4.0 o superior, por lo que este se lo facilita con el paquete de instalación del programa.

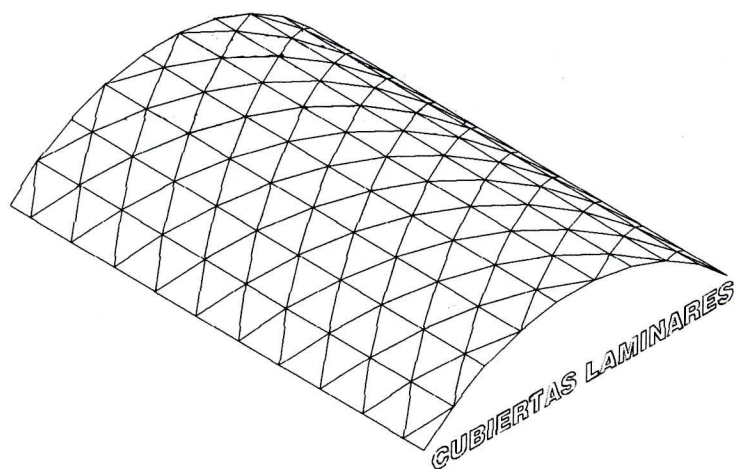
Además presenta información sobre los autores y versión.

Constará de una ayuda de parámetros estructurales.

7.8.4 IMPRESIÓN DE RESULTADOS.

Cada formulario de resultados posee un menú archivo desde el cual puede accionar un submenú de impresión. En vista de que los procesos de impresión son muy complicados, no se ha incluido la opción de modificar márgenes y tamaño de papel estandarizado es el A4.





CAPITULO VIII

8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

❖ CONCLUSIONES

- Con la elaboración del programa **Cubiertas Laminas Cilindricas**, se ha querido hacer conocer el gran desarrollo de la utilización de los perfiles metálicos en la construcción de cubiertas y al avance constante de nuevas técnicas, métodos y procedimientos para el análisis de este tipo de estructuras, y a la necesidad de crear cubiertas capaces de responder a las expectativas de confortabilidad y espaciamiento dentro de las mismas.
- El análisis de los resultados de la aplicación práctica hace ver las grandes posibilidades que el hierro nos brinda para el cubrimiento de espacio de grandes dimensiones, prescindiendo de elementos resistentes dispuestos en el interior de la cubierta.
- Los resultados del análisis de la cubierta han sido comprobados con la aplicación de paquete computacional **C.L.C** llegando a la conclusión que el programa definitivamente es confiable, ya que hace un análisis exhaustivo de parámetros que ningún programa comercial toma en cuenta en la resolución de este tipo de cubiertas.

- La construcción de cubiertas laminas nos proporciona una gran resistencia con el cual obtendremos estructuras livianas y de poco volumen.
- La realización del programa representa un importante paso en la continua búsqueda de soluciones para el desarrollo y economía del país.

❖ RECOMENDACIONES

- Con la realización del presente programa se brinda un granito de arena con la finalidad de crear en nuestro país nuestro propio software para ingeniería civil, mediante la utilización de normas y códigos valables para la realidad de nuestro entorno.
- Durante el transcurso de la investigación, se hace necesario que en lo futuro se realicen investigaciones detalladas sobre estos tipos de cubiertas poco aplicadas en nuestro país, por esta razón subrayamos la importancia de involucrarnos en el estudio a fondo, de éstas, y otras nuevas formas de cubiertas.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

ALDER J., HENRICH. MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS, 1990.

BRESLER, LIN y SCALZI. DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO, Edit. Limusa-Wiley, México, 1970.

GAYLORD, Edwin y Charles, DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE ACERO, Edit. Continental, México, 1980.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL, JORNADAS NACIONALES DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, Facultad de Ingeniería Civil, Noviembre 27,28,29 (1991), Quito-Ecuador.

McCORMAC Jack, ESTRUCTURAS, ANÁLISIS Y DISEÑO, Estructuras de Acero Método LRFD, Edit. Alfaomega, Bogotá-Colombia,1989.

WILSON EDWAR, THE SAP-90 SERIES OF STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAMS.

Frederick S. Merrit., MANUAL DEL INGENIERO CIVIL, TOMO 2, Edit. Mc-Graw Hill, 2da. Edic., México, sec.17-7

American National Standart Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures (Cargas mínimas de diseño para edificios y otras estructuras según el ANSI), ANSI A58.1-1982(Nueva York: American National Standars Institute, Inc) (Instituto Americano de Normas Nacionales)

ÍNDICE

	Página
CERTIFICACIÓN	
AUTORÍA	ii
DEDICATORIA	iii
AGRADECIMIENTO	iv
CONTENIDO	v
INTRODUCCIÓN	x
 Capítulo 1.	
GENERALIDADES SOBRE DISEÑO ESTRUCTURAL	1
1.1. Estructuras en Ingeniería	1
1.2. Procedimiento de diseño	1
1.3. Cargas permanentes	2
1.4. Cargas vivas	3
1.5. Cargas de viento	4
1.6. Cargas de sismo	4
1.7. Seguridad de las estructuras	5
1.8. Consideraciones probabilística de la seguridad	7
1.9. Factor de seguridad y factor de carga.	10
1.10. Códigos y especificaciones	11

Capítulo 2.

MATERIALES	13
2.1 Ventajas y desventajas del acero como material	
Estructural	13
2.2 Propiedades mecánicas de los metales estructurales	14
2.3 Propiedades mínimas de tensión de los aceros	
estructurales	17
2.4 Perfiles metálicos laminados en frío.	18
2.4.1. Introducción	18
2.4.2. Perfiles de lámina delgada en el mercado	
nacional	19
2.4.3. Consideraciones de diseño	20
2.4.4. Esfuerzo admisible básico	21

Capítulo 3.

MIEMBROS A TENSION	22
3.1 Tipos de miembros a tensión	22
3.2 Esfuerzos permisibles	23
3.3 Miembros a tensión con conexiones soldadas	24
3.4 Esfuerzos residuales y perforaciones de los perfiles	25
3.5 Esbeltez máxima	29

Capítulo 4.

MIEMBROS A COMPRESIÓN	30
4.1 Introducción	30
4.2 Esfuerzos permisibles	30
4.3 Miembros a compresión	31
4.4 Carga crítica de Euler	32
4.5 Pandeo elástico	33
4.6 Pandeo inelástico	34
4.7 Pandeo torsional	36
4.8 Pandeo local	36
4.9 Pandeo general de flexión	42
4.10 Falla por aplastamiento	43
4.11 Longitud efectiva	43
4.12 Esbeltez máxima	45
4.13 Miembros tubulares cilíndricos en compresión	46

Capítulo 5.

CONEXIONES SOLDADAS	49
5.1. Introducción	49
5.2. Soldadura	49
5.3. Tipos de soldadura	51
5.4. Electrodo	52
5.5. Símbolos de soldadura	53

5.6.	Bases de diseño	54
5.7.	Soldadura a tope	55
5.7.1	Área efectiva	55
5.7.2	Esfuerzos admisibles	56
5.7.3	Resistencia nominal	57
5.7.4	Limitaciones de diseño	57
5.8.	Soldadura de filete	58
5.8.1	Área efectiva	58
5.8.2	Esfuerzos admisibles	59
5.8.3	Resistencia nominal	60
5.8.4	Carga admisible por unidad de longitud	61
5.8.5	Limitaciones de diseño	62
5.9.	Capacidad admisible de conexiones soldadas	65

Capítulo 6.

TEORÍA DE LA LÁMINA CILÍNDRICA RETICULADA DE		
DIRECTRIZ CIRCULAR		68
6.1.	Generalidades	68
6.2.	Teoría de la lámina cilíndrica reticulada de directriz circular	71
6.3.	Sistema homogéneo	72
	6.3.1. Determinación de ecuaciones	73
6.4.	Desarrollo numérico	94

6.4.1. Estado membrana	97
6.4.2. Carga uniformemente repartida en planta.	101

Capítulo 7.

PLANIFICACIÓN Y ESTRUCTURACIÓN DEL PROGRAMA	133
7.1. Revisión de datos de diseño	133
7.2. Planificación de algoritmos	134
7.3. Estructuración de algoritmos	135
7.4. Diagrama de flujo	137
7.5. Salida de resultados	142
7.6. Limitaciones del programa	142
7.7. Ejercicio de aplicación y comparación con los resultados del programa	143
7.8. Manual del usuario	155
7.8.1 Descripción y manejo del paquete computacional	155
7.8.2 Unidades de trabajo	158
7.8.3 Descripción de cada una de las opciones a elegir	158
7.8.4 Impresión de resultados	168

Capítulo 8.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	169
--------------------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA