TEORIA DE CONJUNTOS

2

UNIVERSIDAD
TECNICA PARTICULAR
DE LOJA

MODALIDAD ABIERTA

1.996

Lcda. Sonnya Coronel
Lcda. Alba Jumbo

2017

UNIVERSIDAD TECNICA PARTICULAR DE LOJA
TEORIA DE CONJUNTOS II
Sonnya María Coronel
Alba E. Jumbo G.
Diseño de Instrucción:
Luis Varela
Revisión del contenido científico:
Jorge Bravo L.
Diseño de portada:

Revisión del lenguaje:
Alba Herrera T.
Levantamiento del texto:
Nancy Cruz
Olga Pineda
Pablo A. González O.

Loja-Ecuador, Julio de 1996
Editorial Universidad Técnica Particular de Loja
San Cayetano
Apartado 608
Télex: 4533 UNITL ED
Fax: 563159
Teléfonos: 570-275 570-375

A mi madre y hermanos
con respeto y gratitud.

Sonnya

Con afecto y gratitud para mi querida familia, a mi esposo y mis hijos, entrego este trabajo como parte de mi vida profesional dedicada a la educación.

Alba

INTRODUCCION

Dada la amplia cobertura lograda y el creciente número de estudiantes de la Modalidad de estudios a distancia de la U.T.P.L. es una necesidad urgente la elaboración y presentación de libros-textos acordes al esquema programático y a los requerimientos de quienes se autocapacitan mediante este sistema de enseñanza aprendizaje.

La multiplicidad de temas abarcados en la carrera de Físico-Matemáticas, los mismos que deben ser tratados en forma ordenada, amplia y aplicados en numerosos ejercicios prácticos, vuelve la bibliografía existente inalcanzable para los estudiantes, dado el alto costo y el gran número de autores de textos especializados para el efecto.

Siendo uno de nuestros objetivos la vasta formación académica de los estudiantes basada en un amplio bagaje de conocimientos, que requiere del cumplimiento de tareas, estudio e investigación contínua de los temas tratados, nos hemos propuesto elaborar in Libro-Texto que, a más de facilitar el estudio y comprensión de los temas abordados con bases científicas conjuge también nuestra experiencia lograda a través de los años de docencia en los niveles medio y universitario.

En base a las consideraciones expuestas, pretendemos elaborar un Libro-Texto didáctico, autoinstruccional de Teoría de Conjuntos II, que sea una ayuda para el estudiante, un medio de consulta y que pueda llegar a los rincones más apartados del país en donde se encuentran alumnos de la Universidad Abierta y que sea accesible para todos aquellos que se dedican al estudio de esta ciencia.

La motivación que nos lleva a realizar el presente Libro-Texto es el proporcionar conceptos básicos, fundamentales, métodos, técnicas, demostraciones, procedimientos actualizados que habiliten al estudiante y lo impulsen al contínuo estudio, así como a su aplicación en diversas asignaturas de la carrera.

Para cumplir con este propósito, el texto lo hemos estructurado en cuatro módulos, así:

El Módulo I trata sobre; RELACIONES BINARIAS, está constituído por cuatro objetivos y cuatro unidades, nos permite conocer lo que es una relación, cómo calcular su dominio e imagen, sus propiedades, las formas de definir una relación, relaciones de equivalencia, particiones y los tipos de orden.

El Módulo II; FUNCIONES; consta de cuatro objetivos y cuatro unidades con sus respectivos segmentos, trata sobre definiciones básicas, las formas de representarlas, sus clases y composición.

El Módulo III; FUNCIONES REALES; abarca tres objetivos y tres unidades con sus respectivos segmentos, esto nos proporciona un conocimiento de las funciones monótonas y las operaciones que pueden realizarse con las mismas.

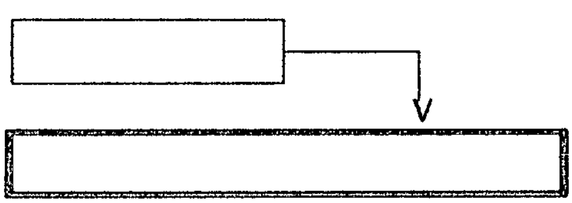
El Módulo IV; OPERACIONES BINARIAS; contiene cuatro objetivos y cuatro unidades con sus respectivos segmentos, trata sobre las definiciones básicas, operaciones que se pueden realizar como: máximo, mínimo, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, unión, intersección, diferencia, etc. así como las propiedades que poseen dichas operaciones.

La técnica que utilizaremos será la enseñanza modular, lo que le permitirá una interrelación entre el material impreso y el estudiante.

Cada módulo consta de una introducción que le permite tener una idea global del contenido y a su vez lo motivará para continuar con el estudio del mismo.

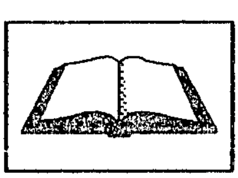
Luego del tratamiento teórico de los temas correspondientes a cada unidad hemos incluido una sección de ejercicios resueltos que le permitirán aplicar toda la teoría estudiada. Con el objeto de afianzar sus conocimientos le presentamos ejercicios propuestos a fin de que pueda demostrar sus logros y habilidades alcanzadas, todo esto con un lenguaje claro, preciso y sistemático, en base a los objetivos planteados, también se incluye al final de cada módulo una autoevaluación que le ayudará a determinar por sí mismo el logro de los objetivos propuestos, como un resúmen de los temas tratados y la bibliografía utilizada.

Para mejor comprensión de Teoría de Conjuntos II y a manera de motivación hemos utilizado indicadores como:

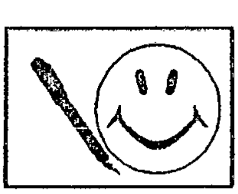


DEFINICIONES BASICAS

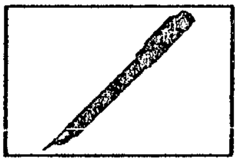
EJERCICIOS ILUSTRATIVOS



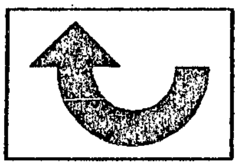
ACTIVIDAD DE REFUEZO



VALORE SUS CONOCIMIENTOS



SOLUCIONARIO



RESUMEN

Deseamos que este texto autoinstruccional le ayude a despejar todas sus dudas y logre despertar el interés por el estudio de la matemática y a la vez sea una base sólida para que continúe con sus estudios y alcance la meta propuesta.

Bien venidas sean las sugerencias de todos los alumnos y docentes, las mismas que serán válidas y nos permitirán mejorar el texto.

Loja, Julio 1996

Sonny Coronel

Alba Jumbo G.

INDICE

P R E F A C I O

Nuestra gratitud para el Lic. JORGE BRAVO L. por haber compartido con nosotros su conocimiento y su experiencia y por haber contribuído con ello a la felíz realización del presente texto autoinstruccional, que servirá de guía para quienes se encuentran ejerciendo la docencia en el nivel medio y para todo educador que desee profundizar sus conocimientos.

Sonnya y Alba

MODULO 1 RELACIONES BINARIAS

INTRODUCCION

Este módulo que le presentamos será un instrumento que le permitirá conocer en forma amplia lo que es una relación, sus propiedades, formas de representar, reconocer un orden y una equivalencia entre objetos cualesquiera.

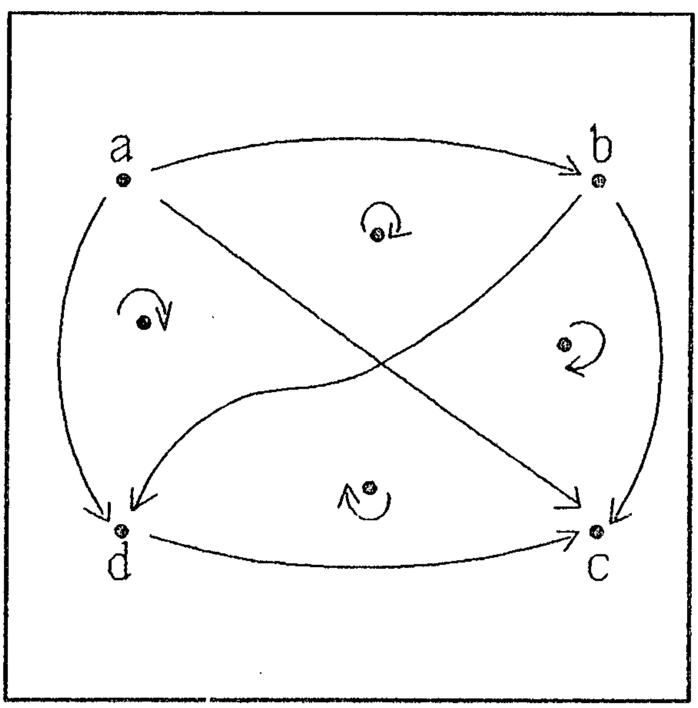
En el mismo se incluye un gran número de ejercicios ilustrativos, en los que se ha detallado su proceso a fin de facilitar su comprensión y permitirle el desarrollo sin dificultad de los ejercicios propuestos, objetivos a distancia y eficiencia en su evaluación presencial.

Pretendemos que estos conocimientos sean útiles y básicos para que Ud. pueda continuar con mayor eficacia el estudio de los módulos posteriores y así alcanzar la meta propuesta.

OBJETIVO 1	Comprender la noción de relaciones binarias y las formas que éstas adoptan al ser definidas entre conjuntos.

UNIDADES	SEGMENTOS
1. Nociones Básicas	1.1. Concepto de relación. 1.2. Relaciones como conjunto de pares ordenados. 1.3. Dominio e imagen de una relación. 1.4. Propiedades.
2. Operaciones en los Naturales	2.1. Relaciones dadas por frases. 2.2. Relaciones dadas por tablas. 2.3. Relaciones dadas por fórmulas. 2.4. Relaciones dadas por gráficos.
3. Operaciones con Conjuntos	3.1. Relaciones de equivalencia. 3.2. Particiones. 3.3. Conjunto cociente. 3.4. Relación inversa.
4. Operaciones Binarias: Propiedades	4.1. Qué es un orden?. 4.2. Orden natural de N. 4.3. Primero y último elemento. 4.4. Tipos de orden.

UNIDAD 1: DEFINICIONES BASICAS	1.1. Concepto de relación. 1.2. Relaciones como conjunto de pares ordenados. 1.3. Dominio e imagen de una relación. 1.4. Propiedades.



OBJETIVO 01	Determinar el dominio, imagen y las propiedades de una relación binaria.

1.1. CONCEPTO DE RELACION

¿Cómo definimos a una relación?

Casi en todas las actividades de la vida cotidiana, siempre estamos escuchando expresiones como:

a) José es alumno de la U.T.P.L.
b) 15 es menor que 35
c) Carlos tiene 13 años
d) Raquel es madre de María
e) Quito es capital del Ecuador

Todas estas expresiones y muchas más son relaciones porque estamos asociando o relacionando dos personas, dos cantidades, dos cosas, dos elementos o dos conjuntos, etc.

POR LO TANTO

Podemos darnos cuenta que cada expresión relaciona dos elementos de un mismo conjunto o de dos conjuntos diferentes, así:

En a) se relaciona una persona con un establecimiento educativo;
En b) se relacionan dos cantidades;
En c) se relaciona una persona con una cantidad;
En d) se relacionan dos personas; y,
En e) se relaciona la ciudad con el

país.

1.2. RELACIONES COMO CONJUNTO DE PARES ORDENADOS

En matemáticas, la palabra relación tiene un significado más preciso que en el lenguaje usual. Para indicar la relación que existe entre los elementos de dos conjuntos o los elementos de un conjunto, vamos a utilizar los pares ordenados que usted ya estudió en Teoría de Conjuntos I.

Así por ejemplo:

Si Marco tiene 18 años y Segundo 22 años, desigtnando por M al conjunto de personas y por N al conjunto de edades, entonces escribimos:

A = {Marco, Segundo}
B = {18,22}

realizando el producto cartesiano M x N, tenemos:

M x N = {(Marco,18), (Marco,22), (Segundo,18), (Segundo,22)}

¿Cuál es el conjunto de pares ordenados en los cuales se cumple la condición "entre la persona y la edad establecida"?

es {(Marco,18), (Segundo,22)}

De los pares ordenados del producto cartesiano, solamente dos cumplen con la condición y con ellos se ha formado un nuevo conjunto que se llama Relación Binaria, designando con R a esta relación tenemos:

R = {(Marco,18); (Segundo,22)}

Entonces podemos decir que la relación no es más que un subconjunto del producto cartesiano M x N.

EJEMPLO: Dados los conjuntos A = {2,3,4} y B = {1,5} y la relación "ser mayor que".

Desarrollo:
Primeramente formamos el producto cartesiano A x B, así:

A x B = {(2,1),(2,5),(3,1),(3,5),(4,1),(4,5)}

los pares ordenados que satisfacen con la condición "ser mayor que" son:

R = {(2,1),(3,1),(4,1)} solución.

De los ejemplos anteriores podemos concluir que:

> __Relación Binaria__.- Es un subconjunto de un producto cartesiano donde se asocia cada elemento del primer conjunto con algún elemento del segundo conjunto.

En símbolos:

Una relación R de A en B se puede escribir así:

$$R = \{(a,b)/a\in A \wedge b\in B\} \subset A \times B$$

De acuerdo a la definición, tenga presente que, para escribir una relación necesitamos:

a) un conjunto A
b) un conjunto B
c) un enunciado formal, (criterio, condición, propiedad) tal que, sea verdadero o falso para todo par ordenado de un producto cartesiano.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Consideremos la relación "mitad de" definida en el conjunto de los números naturales menores a 6.

$A = \{1,2,3,4,5\}$

Desarrollo:

Seguimos el siguiente proceso:

a) Formamos el producto cartesiano A x A

$$\begin{aligned} A \times A = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5);\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5);\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5);\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5);\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\} \end{aligned}$$

b) Siendo la condición "mitad de" tenemos:

c) $R = \{(1,2);(2,4)\}$ solución

2. Sea la relación "alcalde de" definida en los conjuntos:

P = {León Febres C., Jorge Reyes}
Q = {Quito, Guayaquil, Loja}

Desarrollo:

a) Considerando el producto cartesiano P x Q

P x Q = {(León Febres Cordero, Quito), (León Febres Cordero, Guayaquil), (León Febres Cordero, Loja), (Jorge Reyes, Quito), (Jorge Reyes, Guayaquil), (Jorge Reyes, Loja)}

b) Tomando en cuenta la condición "alcalde de", se tiene:

c) R = {(León Febres Cordero, Guayaquil);(Jorge Reyes,Loja)} soluc.

3. Sea R una relación en F = {2,3,4,5} definida por el enunciado formal "a∧b son primos".

Desarrollo:

a) Elaborando el producto cartesiano F x F

F x F = {(2,2),(2,3),(2,4),(2,5);
(3,2),(3,3),(3,4),(3,5);
(4,2),(4,3),(4,4),(4,5);
(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)}

b) Analizando la condición "a∧b son primos", se determina que:

c) R = {(2,3),(2,5),(3,2),(3,5),(5,2),(5,3)} solución

De lo expuesto anteriormente podemos decir que:

UNA

Relación está bien definida si se puede decir de cualquier par ordenado, si satisface o no la relación; es decir, si es V o F. Pero para algunas que presentan ambiguedad es necesario adjuntar notas aclaratorias como la extensión o alcance que se va a utilizar.

A continuación citamos algunas relaciones en las que se indica la extensión o alcance:

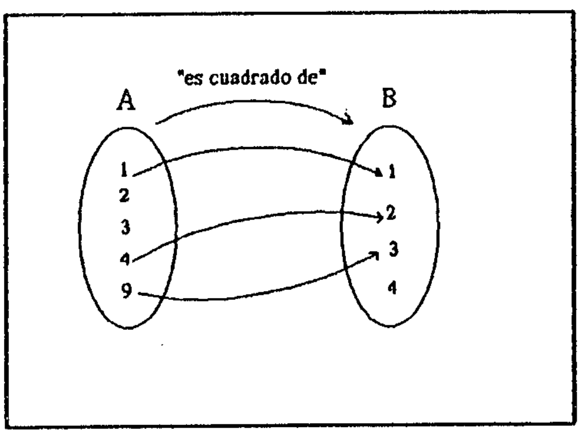
Condición	Alcance
a. "ser semejante"	entre triángulos
b. "ser congruente"	entre rectas
c. "ser más alto"	entre personas
d. "ser más nuevo que"	entre objetos
e. "ser más conocidas"	entre instituciones educativas
f. "ser primo"	entre números
g. "ser más importante"	entre personas
h. "ser anterior a"	entre el conjunto de los N

1.3. DOMINIO E IMAGEN DE UNA RELACIÓN

Para definir las partes de las que está formada una relación, desarrollaremos el siguiente ejercicio.

Sea la relación "cuadrado de" definida en los conjuntos:

$A = \{1,2,3,4,9\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$



POR LO TANTO

<u>El conjunto de partida o alcance</u> está formado por todos los elementos que forman el primer conjunto (A), es decir {1,2,3,4,9}

Simbólicamente: $\mathbf{A = \{x/x \in A \wedge x \quad B\}}$

<u>El conjunto de llegada o rango</u> está formado por todos los elementos que forman el segundo conjunto (B), es decir {1,2,3,4}

Simbólicamente: $\mathbf{B = \{y/y \in B \wedge y \quad A\}}$

<u>El dominio</u> está formado por las primeras componentes de los que cumplen con la condición dada, es decir {1,4,9}

Simbólicamente: **Dm = {a∈A/(a,b)∈R, para alguna b}**

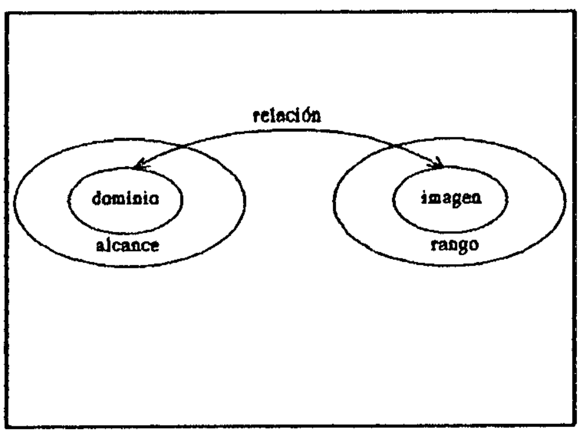
El codominio, contradominio o imagen está formado por las segundas componentes de los pares ordenados que cumplen con la condición, es decir {1,2,3}

Simbólicamente: **Im = {b∈B/(a,b)∈R, para alguna a}**

RECUERDE QUE

El dominio es un subconjunto del alcance. Dm ⊂ A. La imagen es un subconjunto del rango. Im ⊂ B

Representado gráficamente tenemos:



EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Dados A = {a,b,c,d} , B = {1,2,3} y R =(a,2), (b,3), (b,3). Determine el Dom(R) e Imagen(R)

   Desarrollo:

   El Dm (R) = {(a,b)} y
   La Im (R) = {(2,3)}

2. Un grupo de estudiantes universitarios se presentan a una prueba de Teoría de Conjuntos I y obtienen las siguientes calificaciones:

Alumnos	José	Luis	Germán	Jorge	Nancy	Gonzalo
Notas	8	7	4	5	9	8

Directamente tenemos los pares ordenados:

R = {(José,8),(Luis,7),(Germán,4), (Jorge,5), (Nancy,9), (Gonzalo,8)}

Para aprobar la asignatura debe tener como mínimo la calificación de 7 puntos.
Si consideramos la relación "aprobó el examen con la calificación de"

Encontremos:

a) El conjunto de los pares de la relación (R)
b) Alcance =
c) Rango =
d) Dominio (R) =
e) Imagen (R) =

Desarrollo:

a) R = {(José,8),(Luis,7),(Nancy,9)}

b) Alcance = {José, Luis, Nancy, Germán, Jorge, Gonzalo}

c) Rango = {8,7,9,4,5}

d) Dm (R) = {José, Luis, Nancy}

e) Im (R) = {8,7,9}

3. Dada la relación "esposo de" definida en personas.

Desarrollo:

Alcance = conjunto de hombres
Rango = conjunto de mujeres
Dm (R) = hombres casados
Im (R) = mujeres casadas

4. Dada la relación: "triple de" definida en N x N

Desarrollo:

Alcance = números naturales
Rango = números naturales
Dm (R) = números naturales
Im (R) = múltiplos de 3

5. Encuentre el dominio y la imagen de la relación:

R = {(x,y)/y=4x}

Desarrollo:

La variable X puede sustituirse por cualquier valor real ya que cuatro veces cualquier número es otro número real. Así, el dominio es:
{x/x es un número real}. La imágen también es el conjunto de los números reales porque cualquier número es cuatro veces otro número real.
Por lo tanto, la imagen es :
{y/y es un número real}

1.4. PROPIEDADES

(GIL, José y otros, 1972; HERNANDEZ, Francisco y otros, 1982)

Una vez comprendida la definición de relación y sus partes, es necesario conocer las propiedades, las mismas que son indispensables para el desarrollo de ejercicios, problemas y temas posteriores.

Las propiedades de las relaciones son:

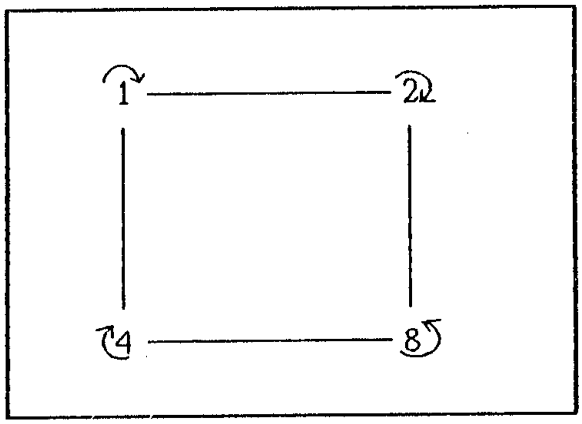
a) Reflexiva
b) Simétrica
c) Antisimétrica
d) Transitiva

1.4.1. PROPIEDAD REFLEXIVA

Consideremos el conjunto A = {1,2,4,8} y R una relación en A determinada por la expresión "divide a", formemos la relación con la condición dada.

R = {(2,8), (2,4),(2,2),(4,8), (4,4),(8,8), (1,1), (1,2), (1,4), (1,8)}

Representemos el gráfico o diagrama de flechas de relación.

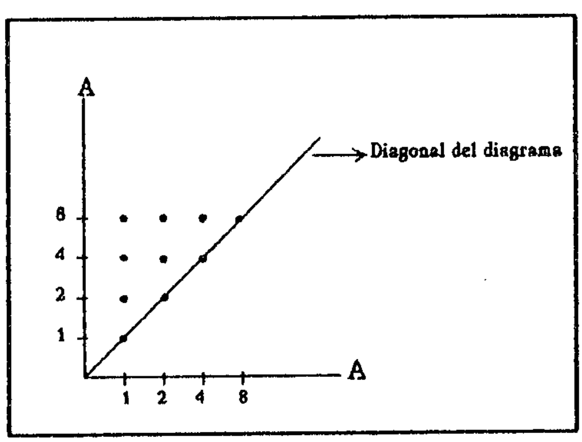


Observemos que todos los elementos del conjunto A tienen un lazo, flecha cerrada o bucle, así: (   )

POR LO TANTO

Una relación es reflexiva cuando en su grado todos los elementos tienen un lazo.
Ahora representamos en un diagrama cartesiano la relación establecida en A.

R = {(1,1),(1,2), (1,4),(1,8),(2,2), (2,4),(2,8), (4,4),(4,8),(8,8)}



Podemos ver que todos los elementos de la diagonal están señalados.

POR LO TANTO

Una relación es reflexiva cuando en su diagrama

cartesiano, todos los elementos de la diagonal están señalados.
Los elementos de la diagonal son pares formados por las componentes iguales (1,1),(2,2),(4,4),(8,8)

De los ejercicios que acabamos de desarrollar, podemos decir:

QUE

Una relación R en un conjunto A es <u>reflexiva</u>, cuando cada ($a \in A$) elemento de A tiene aptitud para estar relacionado consigo mismo.

<u>Simbólicamente</u>:

$xRy \longrightarrow x\,R\,x \;:\; \forall\, x,\, y \in A$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea la relación <u>"ser hija de"</u> definida entre personas.

   Desarrollo:

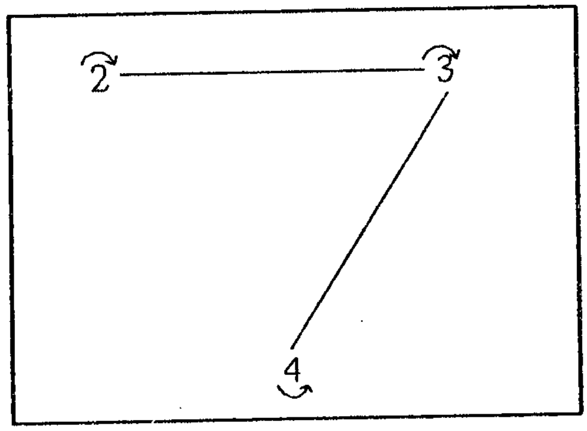
   Elijamos dos personas María y Rosa que efectivamente sean madre e hija, planteamos:

   $x\,R\,y \longrightarrow x\,R\,x$

   María hija de Rosa — María es hija de María

   Concluímos diciendo que cualquier persona no puede ser hija de sí mismo, luego no se cumple la propiedad reflexiva.

2. Dado el conjunto M = {2,3,4} y la relación dada por los pares:
   (2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)
   cuando una relación binaria está expresada por pares ordenados, la comprobación de sus propiedades se hace más fácil dibujando un diagrama de flechas, así:



Como todos los elementos de M, están relacionados consigo mismo, entonces se cumple la propiedad reflexiva.

3. Dado A = {x/x∈N pares ≤ 8} y la condición "múltiplo de".

Desarrollo:

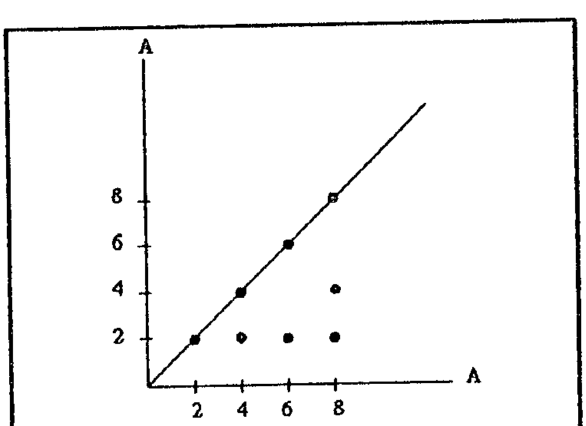
Primeramente tabulamos el conjunto dado:

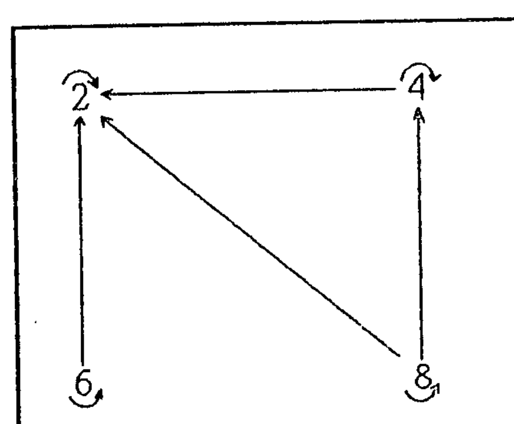
A = {2,4,6,8}

Luego determinamos la relación:

R = {(2,2),(4,2),(4,4),(6,2),(6,6),(8,2),(8,4),(8,8)}
Analicemos si esta relación cumple con la propiedad reflexiva.

Representemos en un diagrama cartesiano y de flehas.





Con lo cual comprobamos que la relación "múltiplo de" en el conjunto A = {2,4,6,8} sí cumple con la propiedad reflexiva.

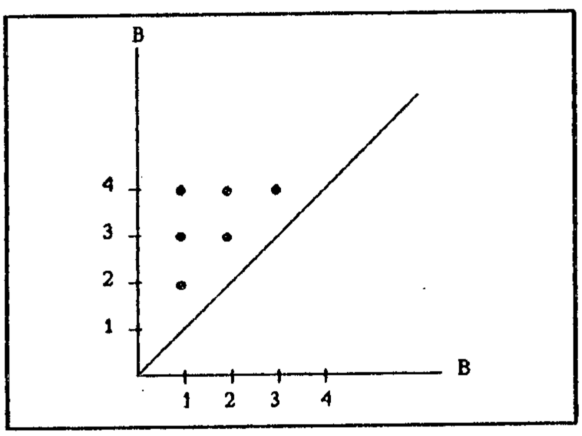
4. En el conjunto B = {1,2,3,4} y la relación "es menor que".

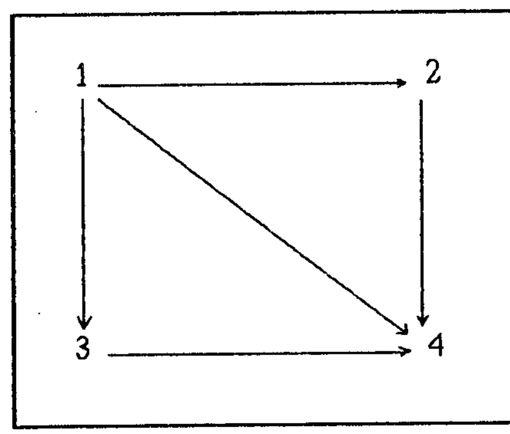
Desarrollo:

Formamos la relación con la condición dada:

R = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)}

Grafiquemos el diagrama cartesiano y de flechas:





Observamos:

Que en el diagrama cartesiano ningún elemento de la diagonal está señalado.

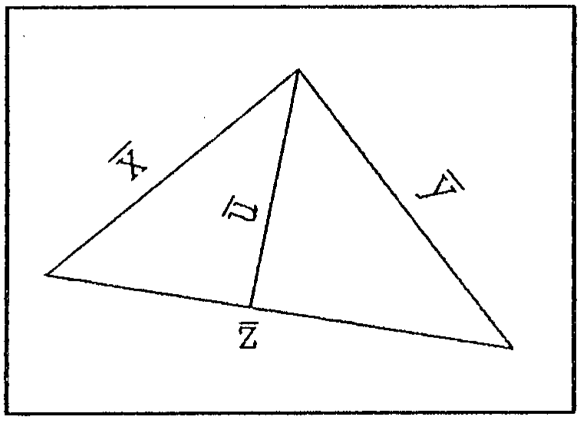
En el diagrama de flechas ningún elemento tiene lazo.

POR LO TANTO

La relación "menor que" en el conjunto B={1,2,3,4} no tiene la propiedad reflexiva.

1.4.2. PROPIEDAD SIMETRICA

Sea el conjunto A = {x,y,z,u} de los segmentos que a continuación graficamos y la relación "es perpendicular a"



Desarrollo:

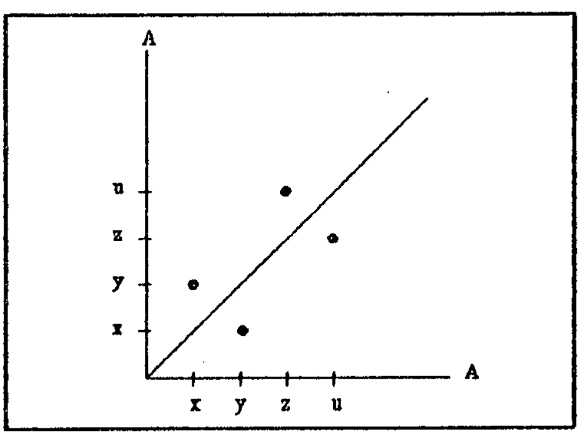
Para determinar los pares que constituyen esta relación formamos el producto cartesiano A x A.

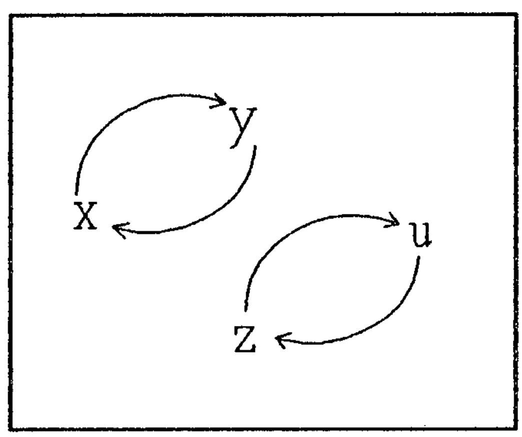
A x A = {(x,x),(x,y),(x,z),(x,u);
(y,x),(y,y),(y,z),(y,u);
(z,x),(z,y),(z,z),(z,u);
(u,x),(u,y),(u,z),(u,u)}

Los pares que cumplen con la relación son:

R = {(x,y),(y,x),(z,u),(u,z)}

Luego graficamos utilizando el diagrama cartesiano y de flechas.





POR LO TANTO

Al observar los gráficos podemos concluir que la relación <u>"perpendicular a"</u> en el conjunto A = {x,y,z,u} es simétrica porque si al diagrama cartesiano lo doblamos por la diagonal, los puntos de la relación se sobreponen y en el diagrama de flechas vemos que los pares de elementos están unidos por dobles flechas. (   )

De los ejercicios anteriores podemos concluir que:

UNA

Relación R en un conjunto A es <u>simétrica</u> cuando dos elementos del conjunto tienen aptitud para relacionarse en un sentido o en otro, según el criterio que se de.

<u>Simbólicamente</u>:

$x \ R \ y \longrightarrow y \ R \ x \ ; \ \forall \ (x,y) \in A$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. En el conjunto de los humanos no se define la relación binaria <u>"ser primo de"</u>.

   Desarrollo:

   Elegimos dos personas, que sean primos: Carlos y Jorge, entonces:

   $$\underbrace{x \ R \ y}_{\text{Carlos primo de Jorge}} \longrightarrow \underbrace{y \ R \ x}_{\text{Jorge primo de Carlos}}$$

   Observamos que cumple la propiedad simétrica, ya que entre dos personas que sean primos es igual el orden en que se diga.

2. En el conjunto de las personas se define la relación binaria <u>"es madre de"</u>

   Desarrollo:

   Elegimos dos personas que sean madre e hija; Martha y Alba, entonces:

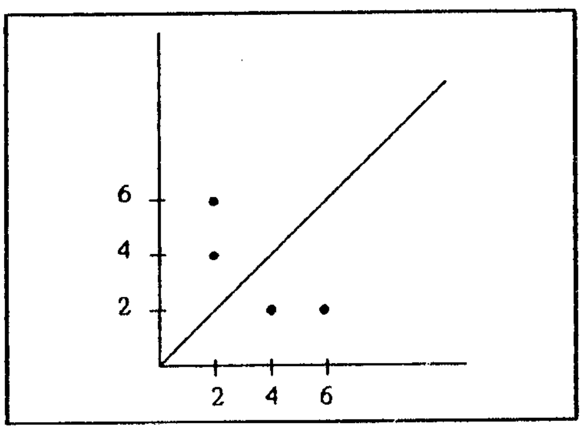
   $$\underbrace{x \ R \ y}_{\text{Martha es madre de Alba}} \longrightarrow \underbrace{y \ R \ x}_{\text{Alba es madre de Martha}}$$

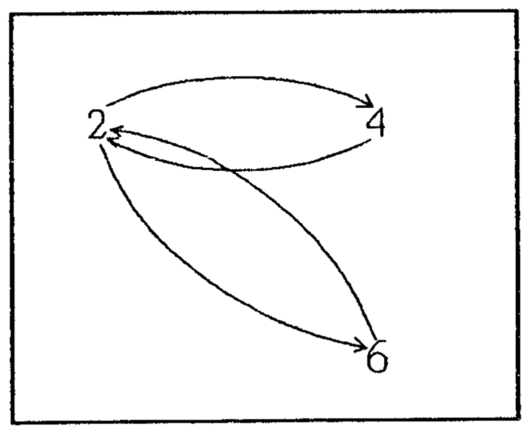
Observamos que no cumple la propiedad simétrica, ya que si Martha es madre de Alba, es imposible que Alba sea madre de Martha.

3. En el conjunto P = {2,4,6} se define la relación binaria R dada por los pares (2,4),(2,6),(4,2),(6,2)

Desarrollo:

Representamos los pares ordenados en el diagrama cartesiano y en el de flechas.





Se puede ver que cumple la propiedad simétrica.

4. Con el conjunto A = {3,6,9,12} y la relación
R = {(3,9),(12,6),(6,12),(6,9),(9,3)}

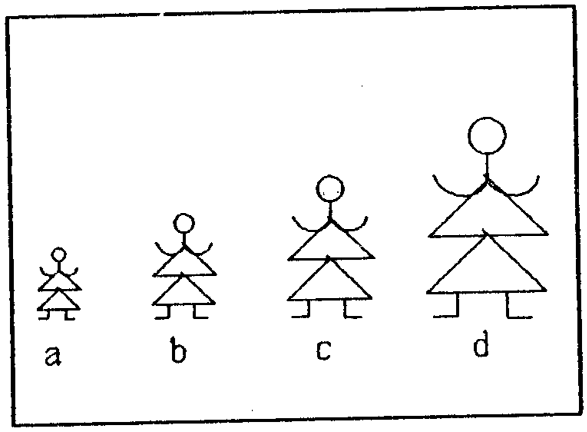
Desarrollo:

Vemos que R no es una relación simétrica porque el par ordenado (6,9) ∈ R pero (9,6) ∈ R

1.4.3. PROPIEDAD ANTISIMETRICA

En la figura que a continuación proponemos se observa el conjunto P de 4 niñas que se designan así:

P = {a,b,c,d}



Consideremos en este conjunto la relación "es más pequeña que"

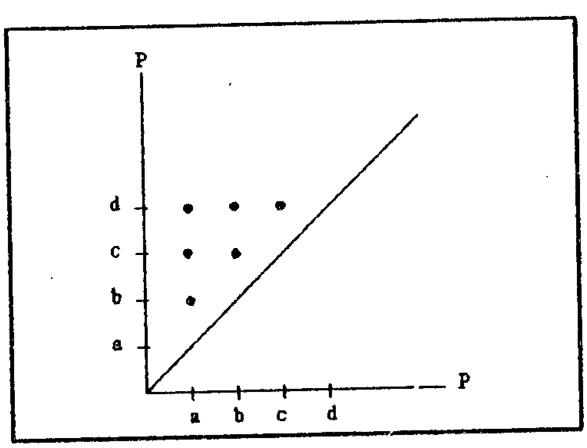
Desarrollo:

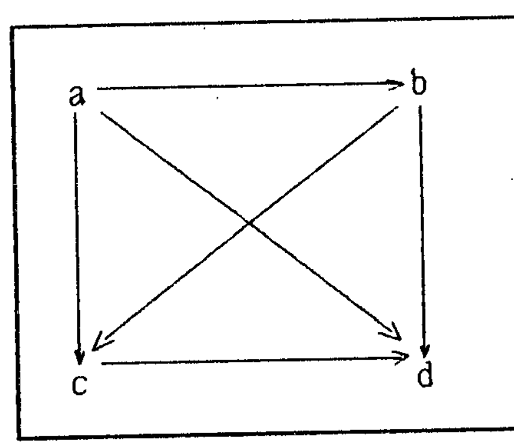
Formamos la relación con la condición dada:

R = {(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)}

Analizando los pares ordenados de la relación observamos que si el par (a,d) ∈ R vemos que el par (d,a) ∈ R, por lo tanto este ejemplo no posee la propiedad simétrica pero sí cumple la propiedad antisimétrica.

Representamos la relación en un diagrama cartesiano y en el de flechas.





Observamos:

Que al doblar el diagrama cartesiano por la diagonal, ningún punto de la relación coincide con otro.
En el diagrama de flechas vemos que no

hay ningún par de elementos unidos por dos flechas.

De lo expuesto anteriormente podemos decir que, una relación es <u>antisimétrica</u>

CUANDO

Dos elementos cualquiera de un conjunto A tienen aptitud para estar relacionados solamente en uno de los sentidos, según el criterio que se de.

<u>Simbólicamente</u>:

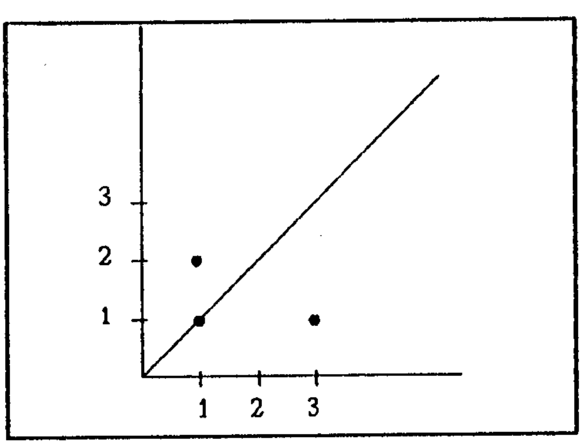
$x \; R \; y \longrightarrow y \; R \; x \;\; \forall \; (x,y) \in A$

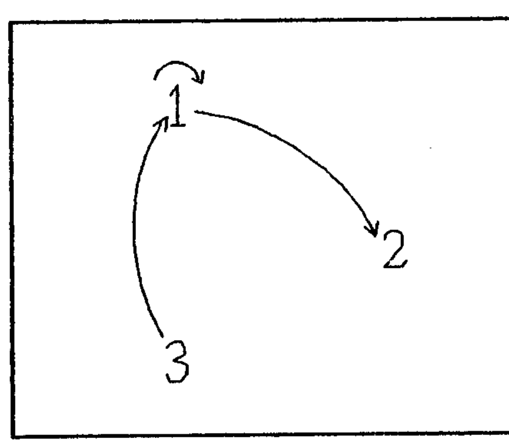
EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Dado el conjunto M = {1,2,3} en el que se define la relación binaria R por los pares ordenados: (1,2),(1,1),(3,1)

   Desarrollo:

   Representamos la relación en el diagrama cartesiano y en el de flechas:





En los gráficos se puede ver claramente que cumple la propiedad antisimétrica porque los pares ordenados (1,2) y (3,1) son elementos de la R y (2,1),(1,3) ∈ R, por lo tanto:

$$1 \; R \; 2 \Rightarrow 2 \; R \; 1$$

2. Sea la relación binaria "es tío de", definida en el conjunto de personas.

Consideremos los nombre Luis y Pepe

$$x\ R\ y \longrightarrow y\ R\ x$$

Luis es tío de Pepe — Pepe no es tío de Luis

La relación dada cumple la propiedad antisimétrica porque si Luis es tío de Pepe, Pepe no puede ser tío de Luis, por lo tanto el par ordenado $(x,y) \in R$ $(y,x) \in R$

3. Sea N el conjunto de los números naturales y R la relación definida en N por "es cuadrado de"

$$N = \{1,2,3,4,\ldots.\}$$

Desarrollo:

Los pares ordenados que cumplen con la condición dada son:

$R = \{(1,1),(4,2),(9,3),(16,4),\ldots\}$

Al analizar los elementos de la R en el conjunto de los N cumplen con la propiedad antisimétrica porque hay pares ordenados en un sentido y no en sentido contrario.

4. Dados los conjuntos $A = \{p,o,r\}$ y $B = \{p,r,o\}$ y el criterio "es igual a"

Desarrollo:

Formamos el producto cartesiano A x B

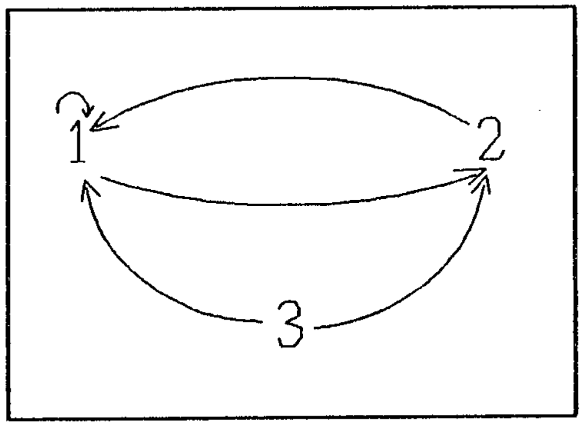
$A \times B = \{(p,p),(p,o),(p,r),(r,p), (r,o),(r,r), (o,p),$
$(o,o),(o,r)\}$

Este conjunto de pares ordenados cumplen con la propiedad simétrica y antisimétrica ya que los conjuntos dados son iguales. Entonces podemos decir que: una relación cumple con las propiedades antes mencionadas en el único caso que exista igualdad en los conjuntos dados.

5. Dado el conjunto $M = \{1,2,3\}$ y la relación binaria R formada por los pares: $(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)$

Desarrollo:

Grafiquemos la relación mediante flechas, así:



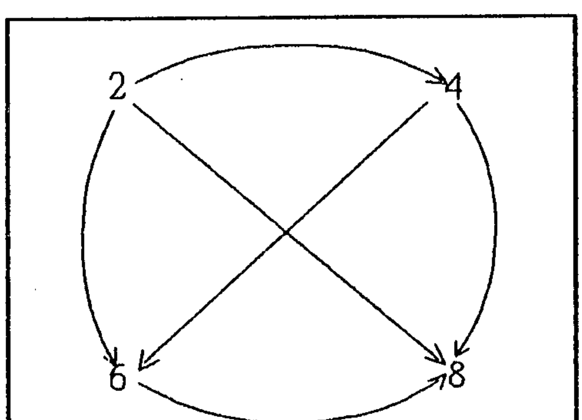
Observe que se cumple la propiedad antisimétrica con los pares (1,3) y (3,2), sin embargo se cumple con la propiedad simétrica con el par 91,2), porque existe el par (2,1) por lo tanto no podemos asegurar en este conjunto y con esta relación que se cumpla la simétrica o antisimétrica.

Es decir, no se cumple ninguna de las dos.

1.4.4. PROPIEDAD TRANSITIVA

En el diagrama de flechas que a continuación proponemos consideramos la condición "menor que" en el conjunto:

Q = {2,4,6,8}



Desarrollo:

Observamos que cuando hay grupos de flechas consecutivas, siempre hay una tercera que une el origen de la primera con el extremo de la última, esto nos permite comprender que la relación "menor que" definida en los N pares menores a 10 es transitiva.

De lo expuesto anteriormente podemos decir que, una relación es transitiva.

CUANDO

Un elemento (a) está relacionado con un segundo (b) y éste con un tercero (c), entonces el primero (a) se relaciona con el tercero (c).

Simbólicamente:

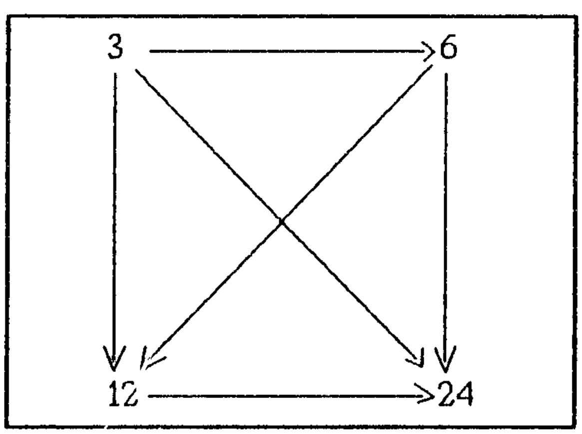
$$a \; R \; b \wedge b \; R \; c \longrightarrow a \; R \; c$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Dado el conjunto A = {3,6,12,24} en el que se define la relación binaria R por los pares ordenados: (3,6),(3,12),(3,24),(6,12), (6,24),(12,24)

   Desarrollo:

   Representamos la relación en el diagrama de flechas.



En el diagrama de flechas se puede observar que cumple la propiedad transitiva porque los pares ordenados (3,12),(6,12) y (3,12) pertenecen a la relación, es decir:

$$3 \; R \; 6 \wedge 6 \; R \; 12 \longrightarrow 3 \; R \; 12$$

2. Dado el conjunto A = {Jorge, Julio, Luis} y la condición nombres de personas que comienzan con la misma letra.

Desarrollo:

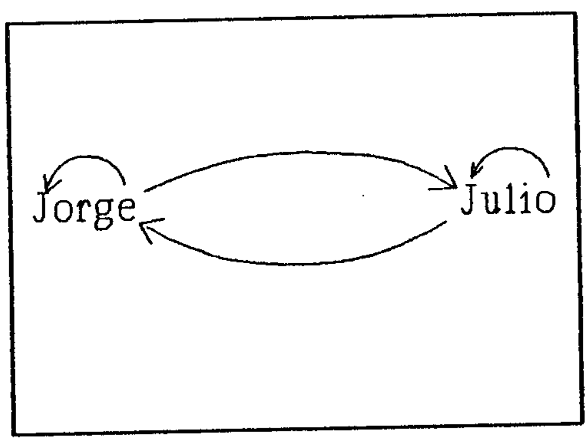
Los pares que cumplen con la condición dada son:

R = {(Jorge,Jorge),(Jorge,Julio), (Julio,Julio), (Julio,Jorge)}

Analizamos si la relación que hemos obtenido cumple con la propiedad transitiva.

Jorge R Julio $\wedge$ Julio R Jorge => Jorge R Jorge

Luego R es transitiva. Su diagrama de flechas es:



3. Dado el enunciado x + y = 10 definido en los N. Determine si es transitiva.

Desarrollo:

Los pares ordenados que cumplen con la relación dada son:
(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5,5),(6,4),(7,3),(8,2),(9,1)

Ahora verifiquemos si cumple con la propiedad mencionada:

a. (1,9) $\in$ R (9,1) $\in$ R ---> (1,1) $\in$ R
b. (2,8) $\in$ R (8,2) $\in$ R ---> (2,2) $\in$ R
c. (3,7) $\in$ R (7,3) $\in$ R ---> (3,3) $\in$ R
d. (4,6) $\in$ R (6,4) $\in$ R ---> (4,4) $\in$ R
e. (5,5) $\in$ R (5,5) $\in$ R ---> (5,5) $\in$ R

Por lo tanto R no es transitiva.

4. Sea la relación "<u>es equinumeroso</u>" definida entre los conjuntos A, B y C. Diga si es transitiva.

Desarrollo:

Consideremos los conjuntos:

$A = \{a,e,o\}$; $B = \{$ $\}$; $C = \{x,y,z\}$

Analicemos la propiedad.

$A\ R\ B \wedge B\ R\ C \dashrightarrow A\ R\ C$

Por lo tanto la relación "<u>es equinumeroso</u>" es transitiva.

5. Dado el conjunto $P = \{1,2,3\}$ y las siguientes relaciones en P:

$R_1 = \{(1,2),(2,2)\}$
$R_2 = \{(3,3)\}$
$R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,1),(2,1),(1,1)\}$
$R_4 = P \times P$

Indique si cada una de ellas es o no transitiva.

Desarrollo:

Comprobamos R_1

$(1,2) \in R \wedge (2,2) \in R \dashrightarrow (1,2) \in R$

$\therefore$ R_1 si es transitiva.

Comprobamos R_2

$(3,3) \in R \wedge (3,3) \in R \dashrightarrow (3,3) \in R$

$\therefore$ R_2 si es transitiva

Comprobamos R_3

$(1,2) \in R \wedge (2,1) \in R \dashrightarrow (1,1) \in R$
$(2,3) \in R \wedge (3,1) \in R \dashrightarrow (2,1) \in R$

$\therefore$ R_3 si es transitiva

Comprobamos R_4

Formamos el producto cartesiano del conjunto dado.

$P \times P = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3), (3,1), (3,2),(3,3)\}$

Como usted ya estudió en Teoría de Conjuntos I, que todo producto cartesiano cumple con la transitividad, por lo tanto R_4 es transitiva.

NORMAS PARA PLANTEAR LAS PROPIEDADES

El planteamiento de las propiedades de las relaciones binarias exige inicialmente un conocimiento perfecto de éstas y después una aplicación adecuada de ellas, según la filosofía con la que están expuestas.

Para ello indicaremos la tónica general con la que deben ser aplicadas.

1.- Todos los elementos que utilicemos en su comprobación deberán pertenecer necesariamente al conjunto en donde se haya definida la relación binaria.

2.- Habremos observado que todas las propiedades se plantean a la izquierda con una o unas premisas y a continuación la flecha implica o no implica que se debe de cumplir o no cumplir la consecuencia de la derecha de tal flecha. Recordemos:

Reflexiva: x R y ---> x R x

Simétrica: x R y ---> y R x

Antisimétrica: x R y --/--> y R x

Transitiva: $\left.\begin{array}{l} x\ R\ y \\ y\ R\ z \end{array}\right]$ ---> x R z

Pues bien, es absolutamente necesario que las premisas de la izquierda de la flecha y de cada propiedad sean absolutamente ciertas para luego estudiar si las consecuencias de la derecha de la flecha y de cada propiedad son ciertas (se cumple la propiedad), o falsas (no se cumple la propiedad). Téngase en cuenta que el principio fundamental de la lógica dice que si se parte de premisas falsas, nunca podremos saber si la conclusión es verdadera o falsa.

3.- Comprobada cada propiedad con los criterios anteriores debemos extender la conclusión a todos los elementos del conjunto, para decidir si a todos se les puede aplicar la conclusión (la propiedad se cumple), o existe algún caso que no responde a la conclusión (la propiedad no se cumple).

Cuando al comprobar una propiedad, observemos que existe al menos un caso en que no se cumple, es suficiente para indicar o invalidar la propiedad para todos los elementos del conjunto.

4.- Cuando la relación binaria R esté expresada mediante una frase, generalmente con comprobar un caso y extenderlo razonablemente a todos los elementos del conjunto es suficiente para asegurarse de si la propiedad se cumple o no se cumple. (Esta forma suele plantearse en conjuntos infinitos de elementos.)

Cuando la relación binaria R esté expresada mediante pares, tendremos que actuar con más cuidado y comprobar todos los casos que sean posibles para asegurarnos la respuesta (esta forma suele plantearse en conjuntos finitos de elementos).

Ej: En el conjunto N se define la siguiente relación binaria: "Dos números cualesquiera están relacionados si acaban en la misma cifra". Comprobar las propiedades.

Ya sabemos que N es el conjunto de los números natuarles {0,1,2,3,...} y la relación binaria R es en este caso "acabar en la misma cifra". Planteemos las propiedades:

1.- **Reflexiva:** x R y ---> x R x

Si elegimos dos números que cumplan a R, por ejemplo 20 y 30, 20 está relacionado con 30 por acabar en la misma cifra, luego 20 va a estar relacionado consigo mismo por terminar evidentemente en la misma cifra.

20 "acabar en la misma cifra" 30 --> 20 "acabar en la misma cifra" 20.

Si lo hacemos extensivo a todos los números del conjunto, vemos que siempre se va a cumplir la reflexiva.

2.- **Simétrica:** x R y ---> y R x

20 "acabar con la misma cifra" 30 --> 30 "acabar con la misma cifra" 20.

Luego se cumple para cuaquier par de elementos que están relacionados según R.

3.- **Antisimétrica:** x R y --/--> y R x; como se cumple la simétrica no se cumple la antisimétrica.

4.- **Transitiva:**

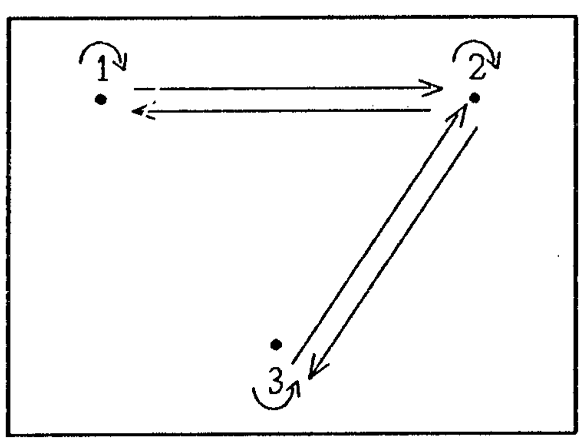
x R y
y R z ---> x R z

20 "acabar con la misma cifra" 30
30 "acabar con la misma cifra" 40 -->20 "acabar con la misma cifra" 40

Luego se cumple para cualquier par de elementos que estén relacionados según R.

Ej: En el conjunto A = {1,2,3} se define la siguiente relación binaria: (1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2).Comprobarlas propiedades.

En este caso, vamos a dibujar el diagrama de flechas.



1.- **Reflexiva:** x R y ---> x R x

Cada elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo por tener un bucle, que es la manifestación original de la reflexiva en un diagrama de flechas, luego se cumple.

2.- **Simétrica:** x R y ---> y R x

En el gráfico observamos que siempre que existe una flecha que va, hay otra que vuelve, luego se cumple.

3.- **Antisimétrica:** x R y --/--> y R x

Como se cumple la simétrica no se cumple la antisimétrica.

4.- **Transitiva:**

$$\left.\begin{array}{l} x \; R \; y \\ y \; R \; z \end{array}\right] \longrightarrow x \; R \; z$$

Observando el diagrama, podemos plantear dos premisas verdaderas que conducen a una conclusión falsa:

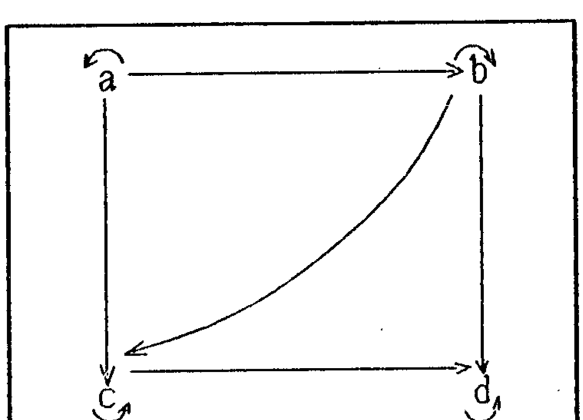
$$\left.\begin{array}{l} 1 \; R \; 2 \\ 2 \; R \; 3 \end{array}\right] \longrightarrow 1 \; R \; 3$$

Luego la propiedad no se cumple.

EJERCICIOS

En las relaciones siguientes comprobemos que propiedades se cumplen en cada una de ellas:

a) "mayor que" definida en los N
b) "es congruente a" entre rectas
c) En el conjunto A = {1,2,3} se define la relación binaria:
(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)
d) Dado el diagrama:



e) $R_1 = \{(1,3)\}$
$R_2 = \{(2,3),(4,5)\}$

Desarrollo:

a) "mayor que" definida en los N

Elijamos un conjunto cualquiera:

A = {1,2,3,4,5,6,...}

Escribamos los pares ordenados que cumplen con la condición:

R_1 = {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3), (5,1), (5,2),(5,3),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)}

PROPIEDAD REFLEXIVA

Al observar la relación vemos que los pares: (1,1),(2,2),(3,3),(4,4), etc., no pertenecen a la R por lo tanto el enunciado "es mayor que" no es reflexiva, ya que ningún número es mayor que sí mismo.

PROPIEDAD SIMETRICA

Analicemos los pares ordenados:

$(2,1) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$
$(3,1) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$
$(3,2) \in R \Rightarrow (2,3) \in R$
$(4,1) \in R \Rightarrow (1,4) \in R$

así sucesivamente.

Concluímos que la propiedad simétrica no se cumple en la relación "mayor que".

PROPIEDAD ANTISIMETRICA

Del análisis anterior podemos decir que si 2 es mayor que 1, entonces 1 no puede ser mayor que 2.
Todos los pares están relacionados en un sólo sentido, por lo que afirmamos que la relación "mayor que" es antisimétrica.

PROPIEDAD TRANSITIVA

La relación "mayor que" en los N es transitiva, porque si un número es mayor que otro y éste mayor que un tercero, entonces el primero es mayor que el tercero, cumpliéndose así la propiedad.

$5 > 3 \wedge 3 > 2 \Rightarrow 5 > 2$
$6 > 2 \wedge 2 > 1 \Rightarrow 6 > 1$

b) "es congruente a" entre rectas.

Sea el conjunto de rectas que presentamos por:

a b c

formamos el producto cartesiano:

{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)}

PROPIEDAD REFLEXIVA

Como los pares ordenados (a,a),(b,b),(c,c) son elementos de R y cada elemento del conjunto se relaciona consigo mismo, entonces afirmamos que el criterio "es congruente a" es reflexivo.

PROPIEDAD SIMETRICA

Analicemos los pares ordenados:

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$
$(a,c) \in R \Rightarrow (c,a) \in R$
$(b,c) \in R \Rightarrow (c,b) \in R$

$\therefore$ es simétrica, ya que sus elementos están relacionados en un sentido y otro.

PROPIEDAD ANTISIMETRICA

De lo anterior podemos indicar que toda relación simétrica no puede ser antisimétrica.

PROPIEDAD TRANSITIVA

La relación "es congruente a" es transitiva porque si un segmento de recta es congruente con un segundo segmento y éste congruente con un tercero, entonces el primero es congruente con el tercero.

$$a = b \quad b = c \Rightarrow a = c$$

c) En el conjunto A = {1,2,3} se define la relación binaria:

(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)

PROPIEDAD REFLEXIVA

$(1,1) \in R$
$(2,2) \in R$
$(3,3) \in R \quad \therefore$ es reflexiva

PROPIEDAD SIMETRICA

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$
$(2,3) \in R \Rightarrow (3,2) \in R \quad \therefore$ es simétrica

PROPIEDAD ANTISIMETRICA

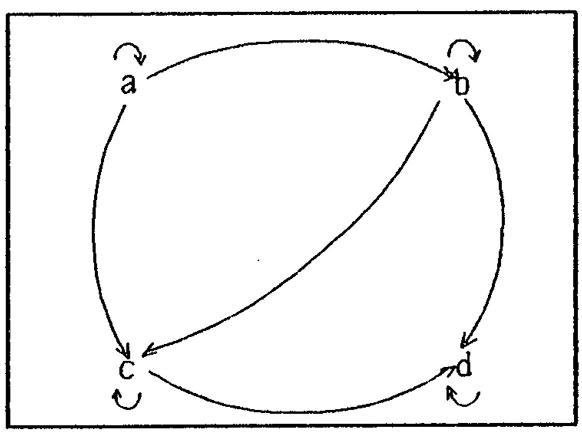
(1,2) ∈ R => (2,1) ∈ R
(2,3) ∈ R => (3,2) ∈ R ∴ no es antisimétrica ya que (2,1) ∧ (3,2) ∈ R

Aclarando que toda relación que cumple con la propiedad simétrica no es antisimétrica.

PROPIEDAD TRANSITIVA

(1,2) ∈ R (2,1) ∈ R => (1,1) ∈ R
(2,3) ∈ R (3,2) ∈ R => (2,2) ∈ R ∴ es transitiva

d)



Verifiquemos las propiedades que cumple el diagrama propuesto.

PROPIEDAD REFLEXIVA

Por tener cada elemento su bucle que es lo característico de la reflexividad de un diagrama, entonces posee la propiedad.

PROPIEDAD SIMETRICA

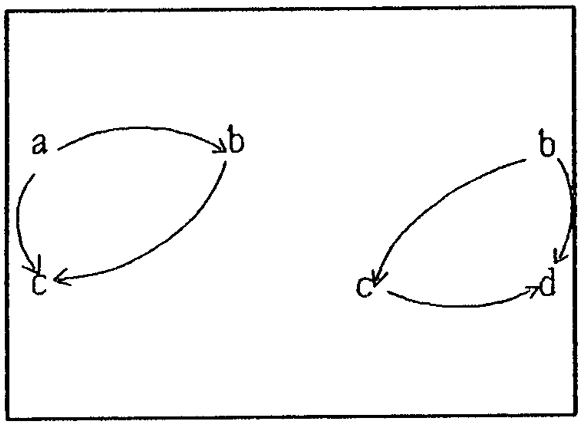
Como los elementos no se relacionan en un sentido y otro, no se cumple con la propiedad.

PROPIEDAD ANTISIMETRICA

La relación dada en el diagrama es antisimétrica porque sus elementos se relacionan en un sólo sentido.

PROPIEDAD TRANSITIVA

En el gráfico se observa pares de flechas consecutivas y una tercera que une el origen de la primera con el extremo de la última, entonces podemos decir que existe la propiedad transitiva.



e) $R_1 = \{(1,3)\}$

PROPIEDAD REFLEXIVA

No existe porque los elementos de la relación no se relacionan consigo mismo.

PROPIEDAD SIMETRICA

No existe porque: $(1,3) \in R \wedge (3,1) \in R$

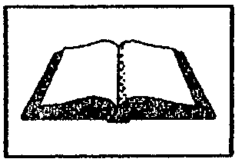
PROPIEDAD ANTISIMETRICA

Al no existir la simetría, se cumple la propiedad antisimétrica.

PROPIEDAD TRANSITIVA

Se cumple la propiedad.

Usted se hará la pregunta por qué si hay 1 sólo par ordenado y sus componentes no son iguales. Le aclaramos su duda. Una relación R de a en b no tiene la propiedad transitiva solamente si al existir el par ordenado (a,b) y el par ordenado (b,c), no existe el par ordenado (a,c) en cualquier otro caso la propiedad si se cumple y en algunas oportunidades se puede demostrar afirmativamente el cumplimiento de dicha propiedad como hemos realizado en algunos ejercicios que están desarrollados.



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 1

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que le proponemos:

BRITTON, Jack R e Ignacio Bello: Matemáticas contemporáneas, traducción Elías Loyola, 2da. ed. México, Edit. Harla, 1979, 730 págs.

1. Encuentre el dominio y la imagen para la relación dada, definida en los N.

   * $\{(x,y)/y = 3x\}$
   * $\{(x,y)/y^2 = x\}$
   * $\{(x,y)/y = 2 + x^2\}$
   * $\{(x,y)/x = 1 + y^2\}$
   * $\{(x,y)/x = 2 + y$

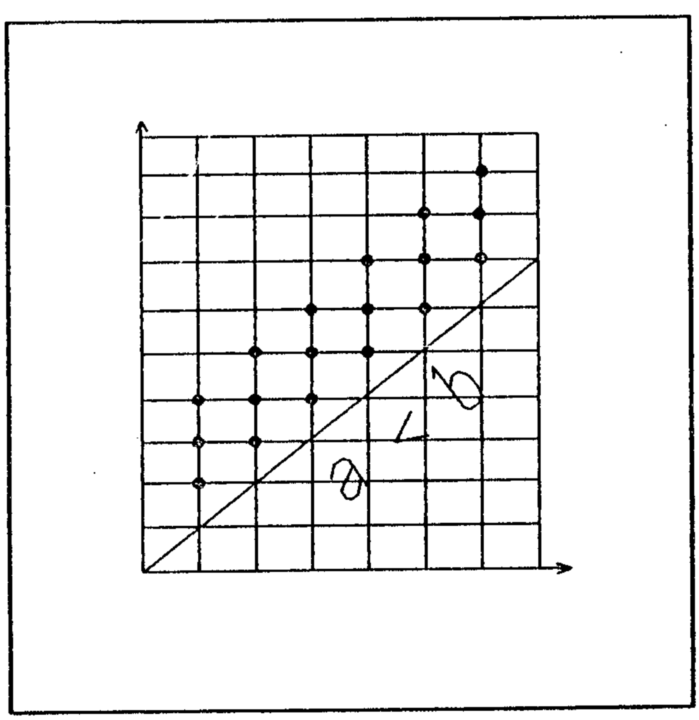
2. Determine la relación mediante pares ordenados y encuentre el dominio y contradominio.

   * $\{(x,y)/y = 2x - 3 \;;\; 0 \leq x \leq 4\}$
   * $\{(x,y)/y = \sqrt{x} \;;\; x = 0,1,4,9,16,25\}$
   * $\{(x,y)/y > x$; x $\wedge$ y son enteros positivos menores que 5}
   * $\{(x,y)/x \leq y$; x $\wedge$ y son enteros positivos menores que 10}
   * $\{(x,y)/y = \sqrt{x} \;;\; x = 0,1,8,27,64,125\}$

3. Compruebe que propiedades cumple cada una de las relaciones:

   * "Es amigo de" definida entre personas
   * "Tiene la misma edad" definida entre personas
   * "Tiene el mismo precio" definida entre cosas
   * "Es cubo de" definida en los N
   * $x + y = 5$ definida en los N
   * $2x + y = 8$ definida en los N.
   * R_1 $\{(2,2),(3,3),(4,4)\}$
   * R_2 $\{(5,6)\}$
   * R_3 $\{(2,3),(3,4)\}$
   * R_4 $\{(1,1),(3,2),(1,2),(2,2),(3,1)\}$

UNIDAD 2: FORMAS DE REPRESENTAR RELACIONES	2.5. Relaciones dadas por frases. 2.6. Relaciones dadas por tablas. 2.7. Relaciones dadas por fórmulas. 2.8. Relaciones dadas por gráficos.



OBJETIVO 02	Representar una relación de diferentes formas.

¿DE QUE MANERA SE PUEDEN DEFINIR LAS RELACIONES?

(VARSAVSKY, Oscar, 1973)

A las relaciones se las puede representar de las siguientes maneras:

2.1. Relaciones dadas por frases
2.2. Mediante tablas
2.3. Por medio de fórmulas
2.4. Por representación gráfica

2.1. RELACIONES DADAS POR FRASES

En la unidad anterior analizamos que a la relación se la puede expresar por medio de palabras; es decir, por descripciones comunes como:

"es amigo de"
"es profesor de"
"es capital de"
"es más alto que"
"vive cerca de", etc..

Además es importante que usted recuerde, en cada caso, con que alcance y rango se va a definir la relación.

2.2. RELACIONES DADAS POR TABLAS

Cuando se presentan relaciones no muy comunes, es importante indicar cuáles son los pares de elementos que cumplen con la condición con lo cual es posible identificar el dominio y la imagen de R.

Las relaciones dadas de esta manera se expresan mejor con tablas: en la primera columna se escriben los elementos del dominio y en la otra la imagen correspondiente.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Planilla de calificaciones del Teoría de Conjuntos II en un ciclo de estudios.

Desarrollo:

"calificaciones de"

dominio	imagen	
Luis	15	15
Nancy	-	-
Jaime	18	10
María	15	10
Esther	12	20
Carmen	20	8
César	-	-
Carlos	-	-

Analizando la tabla vemos que:

Dominio = {Luis, Jaime, María, Esther, Carmen}
Codominio = {8,10,12,15,18,20}

Así mismo observamos que la imagen de cada alumno es:

Im (Luis) = {12,15}
Im (Nancy) = ϕ
Im (Jaime) = {18,10}
Im (María) = {15,10}
Im (Esther) = {12,20}
Im (Carmen) = {20,8}
Im (César) = ϕ
Im (Carlos) = ϕ

Concluyendo tenemos que la imagen de cada elemento del dominio es un conjunto de uno o más elementos.

Solución:

En el ejemplo propuesto el rango está formado por las calificaciones que pueden obtener los alumnos, esto es de 0 a 20. El alcance es el conjunto formado por todos los alumnos matriculados, esto es: Luis, Nancy, Jaime, María, Esther, Carmen, César y Carlos.

2. Analizando la relación "asignaturas que toma en un determinado ciclo de estudios"

Desarrollo:

dominio	"Matriculados en" imagen
Sonnya	Matemáticas I, Estadística, Inglés
Alba	Estadística
Nancy	Dibujo, Matemáticas I, Física
Fanny	Física, Dibujo
Dolores	---
Carmen	Estadística, Física, Geometría

Observando la tabla vemos que:

Dominio = {Sonnya, Alba, Nancy, Fanny, Carmen}
Codominio = {Matemáticas,Estadística,Inglés,Dibujo, Física, Geometría}

Solución:

Alcance = {Sonnya, Alba, Nancy, Fanny, Dolores, Carmen}
Rango = {Asignaturas}

De igual forma la imagen de cada alumna es:

Im (Sonnya) = {Matemáticas I, Estadística, Inglés}
Im (Alba) = {Estadística}
Im (Nancy) = {Dibujo, Matemáticas I, Física}
Im (Fanny) = {Física, Dibujo}
Im (Dolores) = ϕ
Im (Carmen) = {Estadística, Física, Geometría}

3. Analizando la relación "es múltiplo de" con alcance igual a:
{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Desarrollo:

dominio	"es múltiplo de" imagen
1	1
2	1,2
3	1,3
4	1,2,4
5	1,5
6	1,2,3,6
7	1,7
8	1,2,4,8
9	1,3,9
10	1,2,5,10

Solución:

Al observar la tabla es evidente que el dominio está formado por los números naturales menores que 11, el codominio por los números naturales menores o iguales a 10, el alcance e imagen están formados por los mismos elementos del dominio y codominio.

La imagen de cada elemento es:

Im (1) = {1}
Im (2) = {1,2)
Im (3) = {1,3}
Im (4) = {1,2,4}
Im (5) = {1,5}
Im (6) = {1,2,3,6}
Im (7) = {1,7}
Im (8) = {1,2,4,8}
Im (9) = {1,3,9}
Im (10) = {1,2,5,10}

4. Tabla del producto cartesiano P x Q, siendo:
P = {1,2,3,4,5} y Q = {2,4,6}

Desarrollo:

P x Q

dominio	imagen
1	2,4,6
2	2,4,6
3	2,4,6
4	2,4,6
5	2,4,6
6	2,4,6

Solución:

Dominio = {1,2,3,4,5,6}
Codominio = {2,4,6}
Alcance = {1,2,3,4,5,6}
Rango = {2,4,6}

La imagen de cada uno de los elementos es:

Im (1) = {2,4,6}
Im (2) = {2,4,6}
Im (3) = {2,4,6}

Im (4) = {2,4,6}
Im (5) = {2,4,6}
Im (6) = {2,4,6}

5. Si queremos dar la relación P entre aviones A,B,C,D,E de la compañía TAME y las ciudades, donde hacen escala, tendríamos la siguiente tabla:

"hace escala en"

dominio	imagen
A	Cuenca, Guayaquil
B	Guayaquil, Quito
C	Loja, Quito, Coca
D	Loja, Guayaquil
E	-----

Solución:

Dominio = {A,B,C,D,E}
Codominio = {Cuenca, Guayaquil, Quito, Loja, Coca}
Alcance = {A,B,C,D,E}
Rango = {Cuenca, Guayaquil, Quito, Loja, Coca}

Podemos decir que esta forma de representar relaciones es interminable por lo que es necesario indicar su alcance.

2.3. RELACIONES DADAS POR FÓRMULAS

Para representar relaciones mediante fórmulas se utilizan signos y símbolos matemáticos. Las que nos permiten expresar en lenguaje matemático lo que hablamos en lenguaje común, así por ejemplo:

Lenguaje Común	Fórmula
"a es mayor o igual que b"	$a \geq b$
"A subconjunto de B"	$A \subset C$
"el triángulo ABC es semejante con A´B´C´"	$\blacktriangle ABC \quad \blacktriangle A'B'C'$
"a es el doble de b"	$a = 2b$
"3 divide a x + y"	$\dfrac{x + y}{3}$
"la edad de x hace tres años era"	$x - 3$
"la edad de y en 1999 será"	$y + 4$
"el conjunto A unido con el conjunto B"	A U B
"a es igual a b"	$a = b$

■ EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea la relación "el triple de un número más dos" definida en el conjunto de los números dígitos. Hallar la imagen de cada elemento del dominio.

Desarrollo:

Expresamos la condición dada mediante fórmula, así: <u>3x + 2</u>

"3x + 2"

dominio	imagen
0	02
1	05
2	08
3	11
4	14
5	17
6	20
7	23
8	26
9	29

Im (0) = {2}   Im (2) = {8}   Im (4) = {14}

Im (1) = {5}   Im (3) = {11}   Im (5) = {17}

Im (6) = {20}   Im (7) = {23}   Im (8) = {26}

Im (9) = {29}

2. Sean los conjuntos A = {María, Carmen, Zoila} y B = {7,15,20} cuya relación es "edad de hace 4 años". Determinar la edad actual (año 1996) e imagen de cada elemento del codominio.

Desarrollo:

"x + 4"

dominio	imagen
María (7)	11
Carmen (15)	19
Zoila (20)	24

Im (María) = {11}
Im (Carmen) = {19}
Im (Zoila) = {24}

3. Sea la relación "cubo de" definida en el conjunto de los enteros (Z) comprendidos entre [-5....5]. Hallar la imagen.

dominio	x^3 imagen
0	0
-1	-1
1	1
2	8
-2	-8
3	27
-3	-27
4	64
-4	-64
5	-125
-5	-125

Im (0) = {0}

Im (±1) = {1,-1}

Im (±2) = {8,-8}

Im (±3) = {27,-27}

Im (±4) = {64,-64}

Im (±5) = {125,-125}

2.4. RELACIONES DADAS POR GRÁFICOS

Otras de las formas utilizadas para definir relaciones es gráficamente, para lo cual nos servimos de los conocimientos adquiridos en el ciclo anterior. (Teoría de Conjuntos I, unidad referente a plano cartesiano)

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Representar gráficamente las relaciones siguientes:

1. "El doble de" definida en los números dígitos.

Desarrollo:

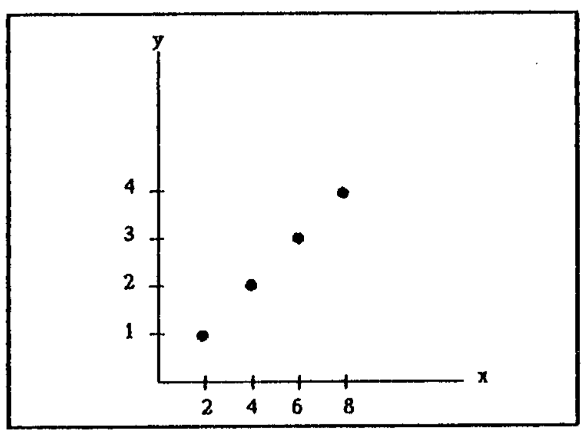
Primeramente escribimos la relación dada utilizando cualquiera de las formas conocidas por ejemplo por medio de tablas.

"2x"

dominio	imagen
2	1
4	2
6	3
8	4

Alcance = {0,1,2,3,4,...9}
Rango = {0,1,2,3,4,...9}
Dominio = {2,4,6,8}
Imagen = {1,2,3,4}

El gráfico de la relación es:



2. "Mayor que" definida en los naturales

N = {1,2,3,4,5,...}

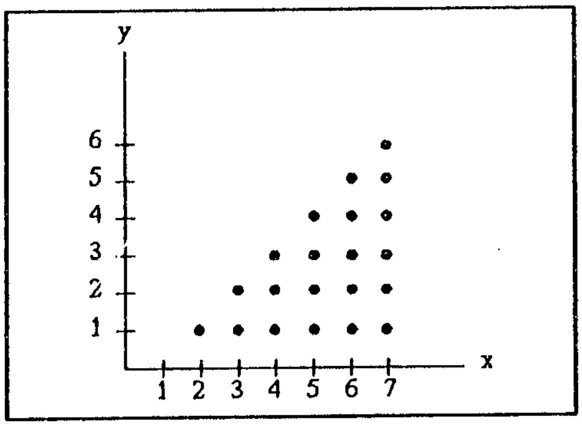
Desarrollo:

La tabla que corresponde a la relación dada es:

" x > y"

dominio	imagen
1	
2	1
3	1,2
4	1,2,3
5	1,2,3,4
6	1,2,3,4,5
7	1,2,3,4,5,6
:	: : :
.	. . .

Alcance = {N}
Rango = {N}
Imagen = {N}
Dominio = {N>1}
Gráfico de la relación:



3. "Un número disminuído en 5" definido en el conjunto de los Z.

Desarrollo:

La tabla que corresponde a la relación dada es:

"x - 5"

dominio	imagen
:	:
-5	-10
-4	- 9
-3	- 8
-2	- 7
-1	- 6
0	- 5
1	- 4
2	- 3
3	- 2
4	- 1
5	0
.	.
.	.

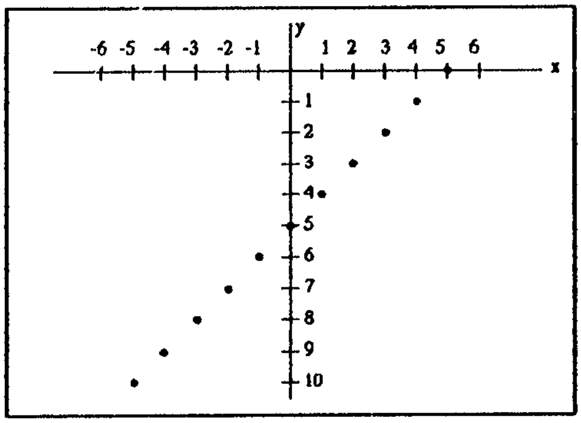
Alcance = {Z}

Rango = {Z}

Imagen = {Z}

Dominio = {Z}

Gráfico de la relación:



RECUERDE:

Que al trabajar con el conjunto de números naturales, la representación gráfica son conjuntos de puntos separados (como lo indican los ejemplos desarrollados). Pero si trabajamos con los números reales, se tiene como dominio todos los puntos de cualquier semieje, dependiendo de la relación, así el gráfico de "menor que" tiene por dominio todo el semieje positivo de x y estará formado por todos los puntos que están sobre la bisectríz.

EJERCICIOS

a) Sean los conjuntos A = {1,4,9,16,25} ; B = {1,2,3,4,5} y la relación "es cuadrado de" definida en Z. Representar en las diferentes formas:

Desarrollo:

Pares ordenados

R = {(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),(9,3),(9,-3),(16,4),
(16,4),(25,5),(25,-5)}

Por fórmula

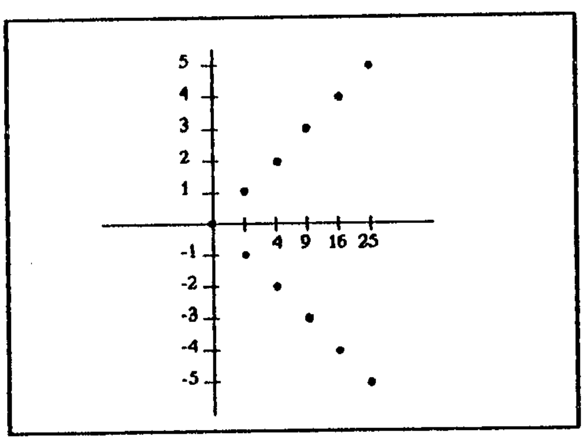
$$x^2 = y$$

Por tabla

"$x^2 = y$"

dominio	imagen
0	0
1	±1
4	±2
9	±3
16	±4
25	±5

Por gráfico



b) Sean los conjuntos A = {1,2,3,4} ; B = {2,4,6,8,10} y la relación "mitad de". Definir en las diferentes formas:

Solución:

Pares ordenados

R = {(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)}

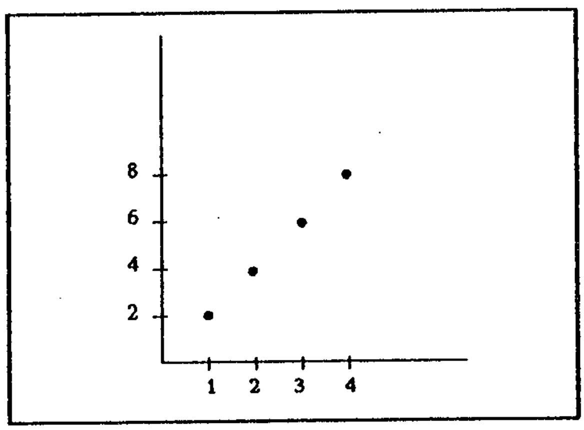
Por fórmula

$$x = y/2$$

Por tabla

"x = y/2" dominio	imagen
1	2
2	4
3	6
4	8

Por gráfico



c) Representar en las diferentes formas la relación R, de alcance igual rango = N definida por a R b sí y sólo sí 3a>b-4 con dominio = {1,2,3}

Desarrollo:

Pares ordenados

R = {(3,5),(3,6),(6,5),(6,6),(6,7),(6,8), (6,9),(9,5),
(9,6),(9,7),(9,8),(9,9),(9,10),(9,11),(9,12)}

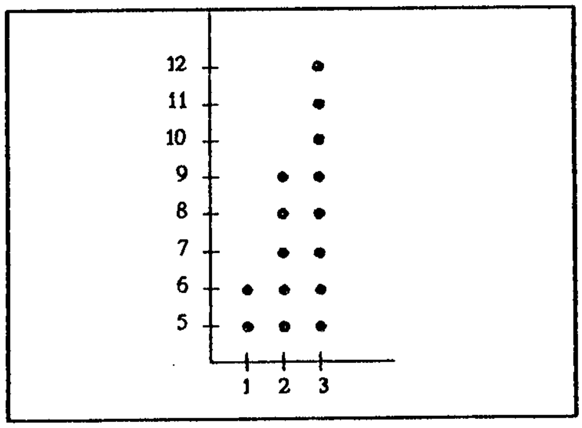
Por fórmula

$$3a > b - 4$$

Por tabla

"3a > b - 4" dominio	imagen
1	5,6
2	5,6,7,8,9
3	5,6,7,8,9,10,11,12

Por gráfico



d) Representar de diferentes formas la relación R de alcance = Z rango = Z definida de a R b, sí y sólo sí $a^2 < b + 3$ con dominio = {-3,-2,-1,0,1,2,3}

Desarrollo:

Pares ordenados

R = {(±3,7),(±3,8),(±3,9)...}

Por fórmula

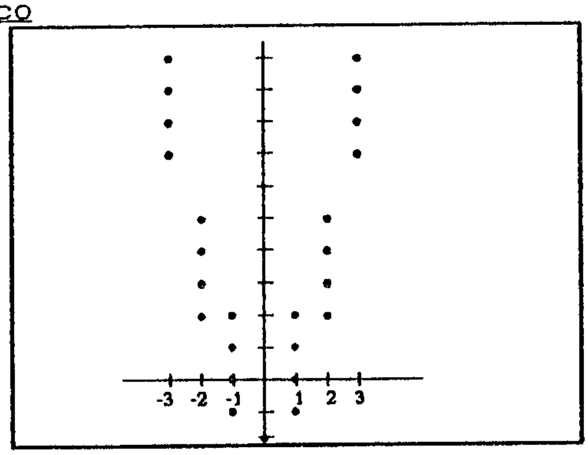
$$a^2 < b + 3$$

Por tabla

"$a^2 < b + 3$"

dominio	imagen
±3	7,8,9,10,...
±2	2,3,4,5,....
±1	-1,0,1,2,...
0	-2,-1,0,1,2,...

Por gráfico



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 2

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que le proponemos:

1. Cuál es la tabla de la relación: "el país x posee importantes minas de y", con alcance = {países de América del Norte}

2. La tabla de "es capital de", alcance: {países de América Central}

3. Tabla de "sucesor" alcance {1,2,3,4,5}

4. Tabla de la relación "es mínimo de", con alcance {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

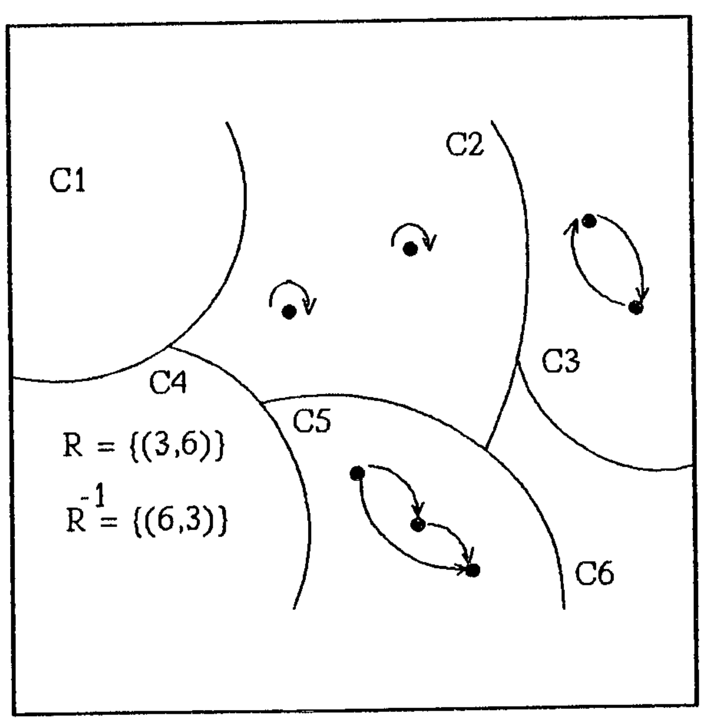
5. Dadas las relaciones escritas en lenguaje común represéntelas mediante fórmula, luego realice su tabla y determine: Dominio, codominio, alcance y rango.

   * "mayor que" definida en {1,2,3,4,5}
   * "divisor de" definida en {2,4,6,8,10}
   * "cuadrado de un número más la unidad" definida en $(N<11)$
   * "mitad de un número disminuido en dos", con dominio:
     $\{x/x \in N \text{ pares}, 6 \leq x \leq 20\}$

6. Representar gráficamente las relaciones R de alcance igual rango=N definida por aRb sí y sólo sí:

   * $2a \leq b - 1$
   * $3a = b$
   * $a \geq b + 1$
   * $a + 2 = 3b$
   * $2a - 1 > b/2$; codominio {1,2,3,4}

UNIDAD 3: RELACIONES DE EQUIVALENCIA, PARTICIONES E INVERSA DE UNA RELACION	



OBJETIVO 03	Identificar una relación de equivalencia, sus clases y su inversa.

3.1. Relaciones de Equivalencia

(GIL, José y otros, 1972)

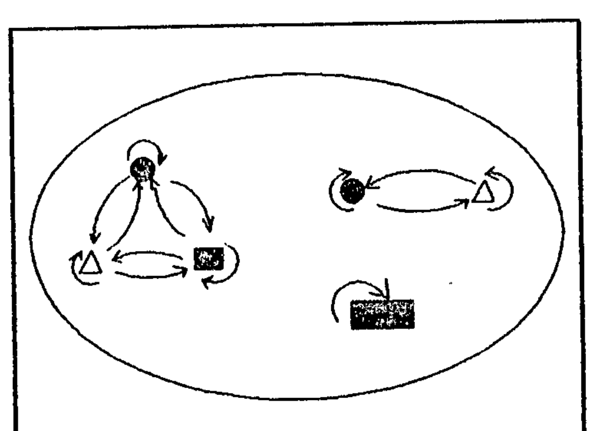
Del conjunto de figuras geométricas, en A se ha definido la relación "el mismo sombreado que".

A = {

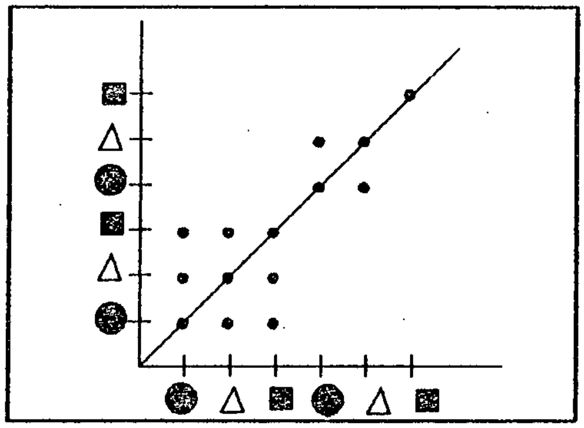
Los pares que satisfacen la condición dada son:

R = {

El diagrama de flechas que representa la relación es:



El diagrama cartesiano de la relación es:



En la representación de la relación A, mediante diferentes formas, se verifica el cumplimiento de las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

Por lo tanto R establecida en A es de equivalencia.

EN CONSECUENCIA

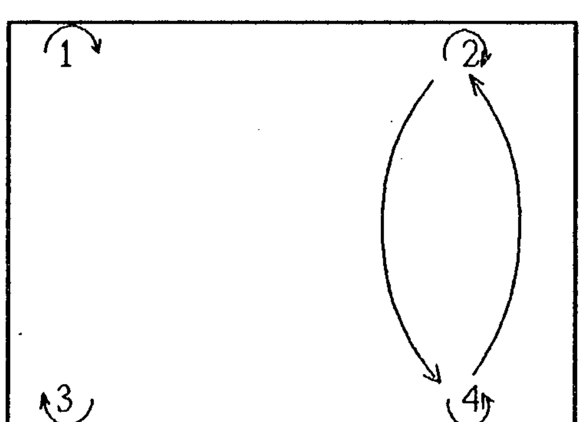
Una relación es de equivalencia cuando cumple simultáneamente las propiedades: Reflexiva, simétrica y transitiva.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. En el conjunto N = {1,2,3,4} se define la relación R: {(1,1),(2,2), (3,3),(4,4),(2,4),(4,2)} Verifique si es de equivalencia.

   Desarrollo:

   Como la relación está dada por pares, dibujemos el diagrama de flechas para comprobar las propiedades:



a) <u>REFLEXIVA</u>

Efectivamente se cumple, porque cada uno de los elementos tiene su bucle.

b) <u>SIMETRICA</u>

Se cumple, porque los elementos tienen aptitud para relacionarse en un sentido y en otro.

c) <u>TRANSITIVA</u>

Se verifica con cada uno de los elementos:

1) 1 R 1 $\wedge$ 1 R 1 => 1 R 1
2) 4 R 2 $\wedge$ 2 R 2 => 4 R 2

<u>CONCLUSION</u>

Por cumplir las propiedades antes indicadas, es una relación de equivalencia.

2. Dada la relación "vive cerca de" definida en el conjunto de personas. Determine si es de equivalencia.

Para analizar la relación tomemos a 3 personas como: José, Juan y Carlos.

<u>SOLUCION</u>

a) <u>REFLEXIVA</u>

José vive cerca de José, J R J
Juan vive cerca de Juan, J R J
Carlos vive cerca de Carlos, C R C

De lo anterior podemos decir que no cumple la propiedad, porque ningún elemento se relaciona consigo mismo, ya que ninguna persona vive cerca de sí mismo.

b) <u>SIMETRICA</u>

José vive cerca de Juan => Juan vive cerca de José

José R Juan => Juan R José
Si cumple

c) <u>TRANSITIVA</u>

José vive cerca de Juan y Juan vive cerca de Carlos
=>José vive cerca de Carlos.

José R Juan Λ Juan R Carlos => José R Carlos
Si cumple

CONCLUSION

Por no cumplir la propiedad reflexiva la relación "vive cerca de" no es de equivalencia.

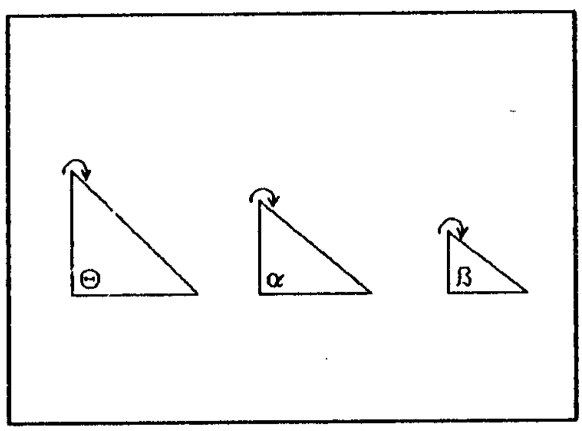
3. Dada la relación "semejante a" definida en:

A = {

Compruebe si es de equivalencia.

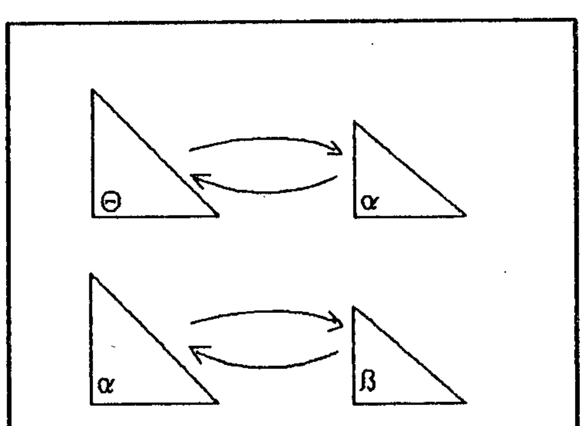
Desarrollo:

a) REFLEXIVA



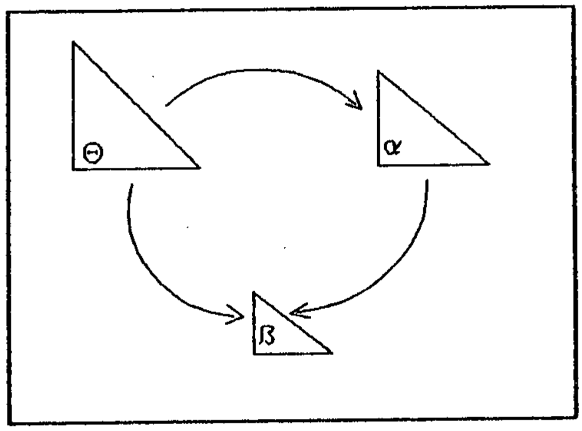
Si cumple porque θ R θ, α R α, ß R ß

b) SIMETRICA



Si cumple: θ R α Λ α R θ
α R ß Λ ß R α

c) <u>TRANSITIVA</u>



$$\theta \; R \; \alpha \wedge \alpha \; R \; \beta \Rightarrow \theta \; R \; \beta$$

<u>CONCLUSION</u>

La relación "semejante a" es de equivalencia por cumplir las tres propiedades.

4. La siguiente tabla define la relación "a < b". Verifique si es una relación de equivalencia.

"a < b"

dominio	codominio
1	2,3,4,5,6,7,8,9
2	3,4,5,6,7,8,9
3	4,5,6,7,8,9
4	5,6,7,8,9
5	6,7,8,9
6	7,8,9
7	8,9
8	9

a) <u>REFLEXIVA</u>

No cumple porque ningún elemento es menor que sí mismo. Ej: $2 < 2$

b) <u>SIMETRICA</u>

No cumple porque si un elemento de la relación es menor que otro, éste no puede ser menor que el primero. Ej: $2 < 3 \Rightarrow 3 < 2$

c) <u>TRANSITIVA</u>

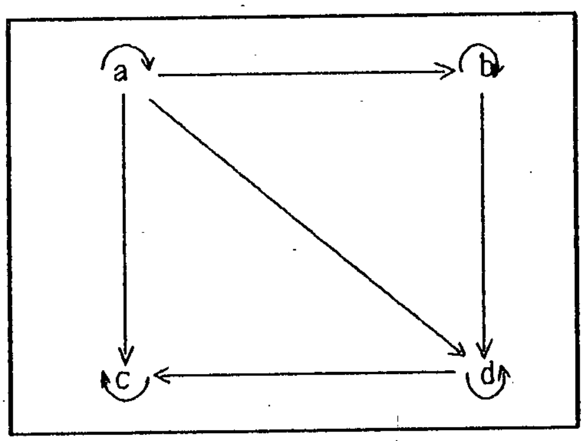
Cumple la propiedad porque si un elemento es menor que un segundo y éste menor que un

tercero; entonces, el primero es menor que el tercero.
Ej: $2 < 3 \wedge 3 < 4 \Rightarrow 2 < 4$

CONCLUSION

La relación "a < b" no es de equivalencia porque no cumple la propiedad reflexiva y simétrica.

5. La relación representada en el diagrama de flechas, es de equivalencia?



a) REFLEXIVA

Si cumple porque:
a R a, b R b, c R c, d R d

b) SIMETRICA

No cumple porque:
$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$

c) TRANSITIVA

Si cumple porque: $a\ R\ b \wedge b\ R\ d \Rightarrow a\ R\ d$
$a\ R\ c \wedge c\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c$

CONCLUSION

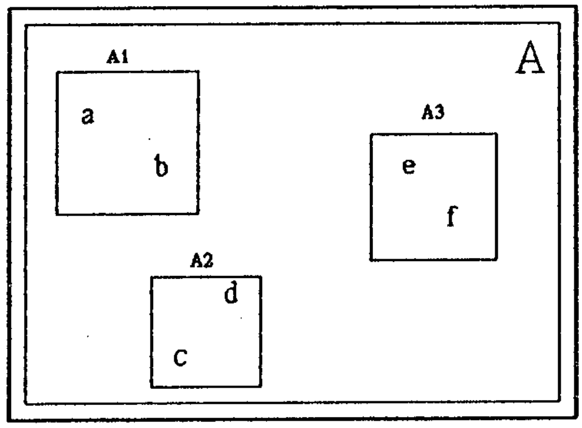
La relación representada por el diagrama de flechas no es de equivalencia porque no cumple la propiedad simétrica.

3.2. PARTICIONES

Consideremos el conjunto A = {a,b,c,d,e,f} y los subconjuntos:

A_1 = {a,b}

$A_2 = \{d,c\}$
$A_3 = \{e,f\}$



La familia de conjuntos $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ tiene las siguientes propiedades:

1. Todos los subconjuntos son distintos del vacío.

   $\{a,b\} = \phi$
   $\{d,c\} = \phi$
   $\{e,f\} = \phi$

2. Dos subconjuntos cualesquiera de A, son disjuntos.

   $\{a,b\} \cap \{e,f\} = \phi$
   $\{a,b\} \cap \{d,c\} = \phi$
   $\{e,f\} \cap \{d,c\} = \phi$

3. La unión de todos los subconjuntos es el conjunto dado.

   $\{a,b\} \cup \{d,c\} \cup \{e,f\} = A$

   Cada uno de estos subconjuntos recibe el nombre de clases de equivalencia, y el conjunto integrado por todos estos subconjuntos toma el nombre de partición del conjunto A.

POR LO TANTO

Cuando una conjunto cualquiera se descompone en subconjuntos que verifican las propiedades indicadas se dice que hay una partición.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea $P = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Comprobar si las siguientes familias de conjuntos son o no particiones de P.

$A_1 = \{1,2,3,4\}$; $A_2 = \{4,5,6\}$; $A_3 = \{7,8\}$
$B_1 = \{1,2,3\}$; $B_2 = \{4,6,8\}$; $B_3 = \{5\}$
$C_1 = \{1,2\}$; $C_2 = \{3,4\}$; $C_3 = \{5,6\}$; $C_4 = \{7,8\}$

Desarrollo:

- Observe que A_1 y A_2 son intersecantes, puesto que $4 \in A_1$ y $4 \in A_2$. Entonces $\{A_1,A_2,A_3\}$ no es una partición de P.
- Observe que P diferente de $B_1 \cup B_2 \cup B_3$, porque $7 \in P$ pero 7 no es elemento de la unión de los subconjuntos. Entonces $\{B_1,B_2,B_3\}$ no es una partición de P.
- Como $P = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y los conjuntos son disjuntos dos a dos, por lo tanto es una partición de P.

2. Halle todas las particiones de $M = \{a,e,o\}$

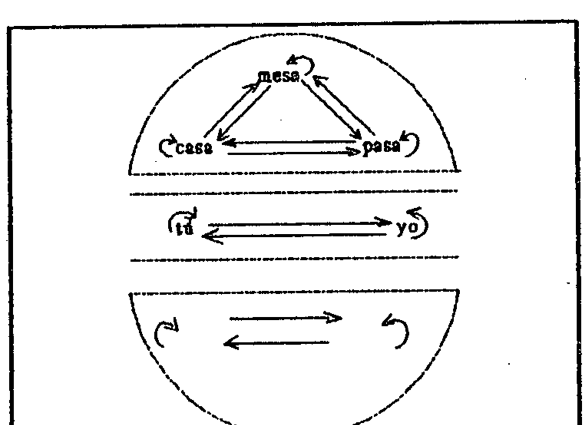
Desarrollo:

Formemos las particiones:

$A_1 = \{\{a,e,o\}\}$
$A_2 = \{\{a\},\{e\},\{o\}\}$
$A_3 = \{\{a\}.\{e,o\}\}$
$A_4 = \{\{e\},\{a,o\}\}$
$A_5 = \{\{o\},\{e,a\}\}$

Por lo tanto hay 5 particiones diferentes.

3. De acuerdo con GIL, José, 1972, En el conjunto P se ha establecido la relación "tiene el mismo número de letras que"



Observemos en el diagrama de flechas que es una relación de equivalencia que determina las siguientes clases:

C_1 = {mesa,casa,pasa}
C_2 = {tú,yo}
C_3 = {camino,dorado}

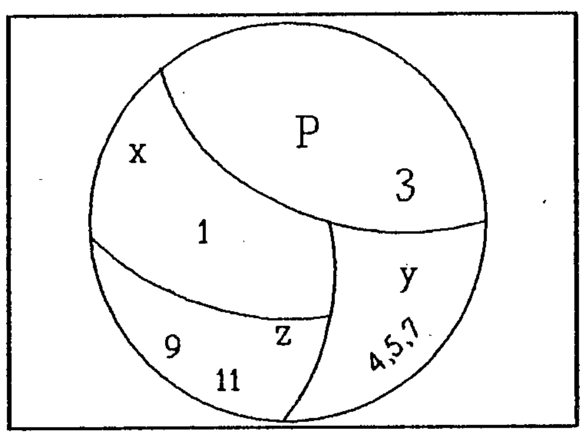
Estas clases son subconjuntos de P que cumplen las propiedades de la partición:

1.- Todos son distintos del vacío.
2.- Son disjuntos dos a dos.
3.- La unión de todos los subconjuntos es el conjunto P.

Por lo tanto, los subconjuntos C_1, C_2 y C_3 constituyen una partición del conjunto P.

4. LONDOÑO, Nelson, 1991 propone este ejemplo:

Sea el conjunto M que se grafica a continuación, el cual ha sido partido en subconjuntos P, X, Y, Z.



- La relación "estar en el mismo subconjunto" es una relación de equivalencia definida en M. ¿Por qué?.
- Decir si los elementos 1 y 3 son equivalentes.
- Decir si los elementos 3 y 5 son equivalentes.
- Decir si los elementos 9 y 11 son equivalentes.
- Cuáles son los subconjuntos.

<u>SOLUCION</u>

* La relación "estar en el mismo subconjunto" si es de equivalencia porque es reflexiva, simétrica y transitiva.

* Los elementos 1 y 3 no son equivalentes.
* Los elementos 3 y 5 no son equivalentes.
* Los elementos 9 y 11 si son equivalentes, porque se encuentran en el mismo subconjunto.
* Los subconjuntos son:

$P = \{3\}$

$X = \{1\}$

$Y = \{4,5,7\}$

$Z = \{9,11\}$

3.3. CONJUNTO COCIENTE

Para HERNANDEZ, Francisco y otros 1982, el conjunto formado por todas las clases de equivalencia recibe el nombre de Conjunto Cociente y se representa por A/R (la letra A variará según el nombre que reciba el conjunto donde se produce la relación de equivalencia).

Hay que hacer notar que el conjunto A y el A/R son el mismo conjunto. La diferencia estriba en que se prefiere la notación A/R cuando se trata de poner de manifiesto que los elementos de A han sido clasificados según clases de equivalencia. Lo que se expresa así:

$A/R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

3.4. RELACIÓN INVERSA O RECÍPROCA

Dada la relación "doble de" definida en el conjunto de los números naturales pares menores que 22.

DESARROLLO:

Formamos la relación que cumple con la condición:

$R = \{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4),(10,5),(12,6), (14,7), (16,8),(18,9),(20,10)\}$

Si invertimos el orden de los elementos de los pares ordenados de la R, obtenemos la relación recíproca la misma que la representamos por: R^{-1}, así:

$R^{-1} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10),(6,12),(7,14), (8,16),(9,18),(10,20)\}$

La relación "doble de" es cierta sí y sólo sí a es "mitad de" son recíprocas o inversas una de la otra.

POR LO TANTO

La inversa de una relación R es otra relación que simbólicamente le asignamos R^{-1}, dada por:

$$a\ R^{-1}\ b \iff b\ R\ a$$

si sabemos cúales son los pares que cumplen R sabemos entonces cuáles son los que cumplen R^{-1}, o sea que las dos relaciones están bien definidas.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Si la relación R es "madre de", la relación inversa es:

   R^{-1} "hija de"

2. Si la relación R es "cubo de" entre N la relación inversa es "raíz cúbica"

3. Si la relación R es "profesor de" la relación inversa es R^{-1} es "alumno de"

4. Si la relación $R = \{(7,6),(7,5),(7,4),(7,3)\}$ la relación inversa es $R^{-1} = \{(6,7),(5,7),(4,7),(3,7)\}$

5. Si R está dada por la siguiente tabla:

R

1	1,2
2	2,3
3	1,2,3

su inversa es

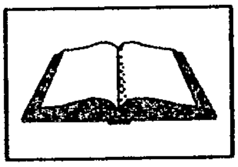
R^{-1}

1	1,3
2	1,2,3
3	2,3

La inversa de una relación dada por la tabla se forma de la siguiente manera:

En la primera columna de la tabla de R^{-1} se escribe todos los elementos que están en la segunda columna de la tabla de R, uno de cada fila, como se tiene en la tabla, si escogemos un elemento del dominio, por ejemplo 3, escribimos a su derecha todos los de la primera columna de R que aparecían en las mismas filas en que estaba el número 3.

Por lo tanto el dominio de R^{-1} es la imagen de R y viceversa; y también alcance de R^{-1} es igual a rango de R y rango de R^{-1} igual alcance de R.



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 3

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que le proponemos:

1. Verifique si las siguientes relaciones son de equivalencia:

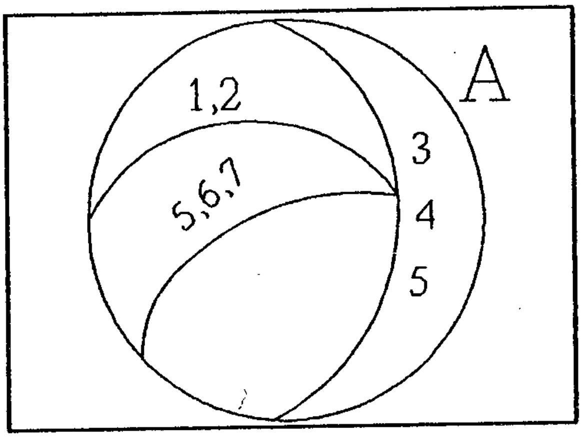
   a) "estar en la misma universidad"
   b) "estudiar la misma asignatura"
   c) "tiene el mismo número de páginas que"
   d) "hermano de"
   e) $R = \{(x,y)/x \wedge y$ son $Z \quad y > x\}$

2. Forme todas las particiones posibles con los elementos del conjunto $B = \{2,4,6,8\}$

3. Con el conjunto $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ diga si la siguiente familia de conjuntos son o no particiones de M. Explique la razón.

   $A_1 = \{\{1\},\{3,4,5\}\}$
   $A_2 = \{\{1,3,5\},\{2\},\{6\},\{4\}\}$
   $A_3 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{6\}\}$
   $A_4 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$
   $A_5 = \{1,2,3,4,5,6\}$

4. Diga si el siguiente gráfico corresponde a una partición del conjunto A. Explique su respuesta:



5. Dadas las relaciones, determine su recíproca.

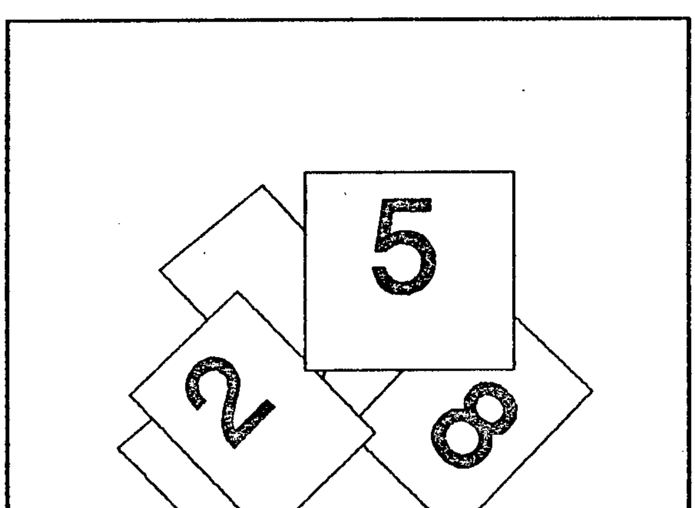
   a)

R

8	7,6,5,4,3,2,1
7	6,5,4,3,2,1
5	4,3,2,1

b) "x es más pobre que y" entre personas.
c) "x es más pequeño que y" entre personas.
d) "x es igual a y" en los N.
e) "x e anterior a y" en los N
f) R = {(3,1),(6,2),(9,3),(12,4),(15,5)}

UNIDAD 4: RELACIONES DE ORDEN	4.1. Qué es un orden 4.2. Orden natural de N 4.3. Primero y último elemento 4.4. Tipos de orden



OBJETIVO 04	Identificar y determinar el orden de una relación, asi como el primero y último elemento respectivamente.

4.1. ¿QUE ES UN ORDEN?

(VARSAVSKY, Oscar, 1985)

Muchas veces los elementos de un conjunto están ordenados. Así, si A = {cine, circo, TV, fútbol}, los elementos de A están escritos en un cierto orden, de izquierda a derecha: primero cine, segundo circo, etc. Este orden podrá representar las preferencias de un señor X, por esos espectáculos: tiene mayor preferencia por el cine, el circo, etc.

Otro señor puede tener preferencias distintas, y ordenaría a los mismos elementos de distinta forma.

Un mismo conjunto se puede ordenar de diferentes maneras.

Estamos usando la palabra "orden" sin haber dicho todavía exactamente qué significa, o mejor dicho, cuándo la vamos a usar. Justamente estamos tratando de ver cuál es la definición más conveniente de este tema tan conocido.

En primer lugar, está claro que debemos llamar "orden" a una relación. En un orden siempre interviene un par ordenado de objetos: "a me gusta más que b"; "a es mayor que b"; "a está a la izquierda de b", etc.

Muchas veces entonces, un orden podrá darse con una tabla. Por ejemplo el orden de preferencias del señor X es una relación de alcance y rango A, representada por tabla, tenemos:

cine	circo, TV, fútbol
circo	TV, fútbol
TV	fútbol
fútbol	-----

Representaremos pues a los órdenes por letras y otros símbolos, como a las relaciones en general. Si R es un orden, a R b significa que a está antes que b en el orden de R, o lo que es lo mismo: b está después de a, o es posterior a a.

Pero, ¿Cuáles relaciones son de orden y cuáles no?.

Tratemos de ordenar a los alumnos de esta división por su méritos como estudiantes. Llamemos M a la relación "mejor alumno que". Hay muchas formas de definir cuando Juan es mejor alumno que Pedro; una de las que menos discusiones despertaría es quizá ésta: a M b significa que el alumno a tiene en cada materia mejor promedio que b.

¿Es M un orden?. Talvez no todos estén de acuerdo, pues tiene el inconveniente que si, por ejemplo, p tiene mejor promedio que q en Historia, pero peor promedio en Geografía, entonces ya no se podrá decir que uno de los dos es mejor que el otro: ni p M q ni q M p.

La relación sucesor, S, parece un orden, pero tiene el inconveniente que aunque el sucesor de 20 es 21, y el de 21 es 22, no es verdad que 22 sea el sucesor de 20. S no es transitiva.

En nuestro concepto de orden éste es un inconveniente muy importante: si a es anterior a b y b es anterior a c, entonces a tiene que ser anterior a c. Si no, no vale la pena hablar de orden.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea el conjunto formado por algunos colores.

   A = {rojo, negro, amarillo, verde, azul, café}

   Desarrollo:

   A este conjunto lo podemos ordenar de diferentes formas, según la preferencia que tengan las personas por los diferentes colores.

   El orden de preferencia de María, Carmen, Rosa, Sonia, Esther la expresamos mediante la siguiente tabla.

María	amarillo, verde, azul, negro, rojo
Carmen	negro, rojo, azul
Rosa	rojo, azul, café
Sonia	azul, café, negro
Esther	------

2. Sea el conjunto de los diferentes colegios de la ciudad de Loja y la relación "ingresa a"

   B = {Adolfo, Dolorosa, Manuel Cabrera, Bernardo, Daniel Alvarez}

   Desarrollo:

   El orden en que se ubiquen los establecimientos educativos estaría de acuerdo a la preferencia de cada uno de los estudiantes.

   El orden de preferencia de los alumnos u,x,y,z lo expresamos así:

   u = {Manuel Cabrera, Bernardo, Adolfo}
   x = {Dolorosa, Daniel Alvarez, Adolfo}
   y = {Daniel Alvarez, Dolorosa, Manuel Cabrera}
   z = {Adolfo, Manuel Cabrera, Bernardo}

3. La relación "doble de" parece un orden pero si lo analizamos detenidamente observamos que no cumple la propiedad transitiva.

   Ej: 8 es doble de 4 $\wedge$ 4 es doble de 2 pero
   8 no es doble de 2

   En consecuencia: "doble de" no es un orden

   NOTA: Toda relación para que sea de orden debe ser transitiva. Lo cual lo trataremos en el cuarto segmento de esta unidad.

4.2. ORDEN NATURAL DE N

(VARSAVSKY, Oscar, 1985)

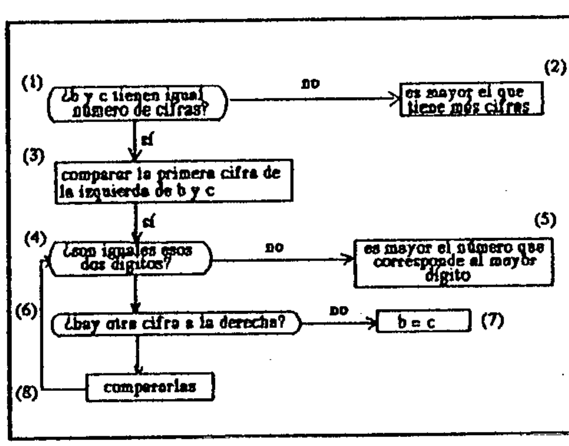
Cuando pensamos en los números naturales $\mathbb{N}$, los pensamos ordenados según la relación $<$: 1,2,3,... Pero, ¿cómo se sabe cuál es el menor de dos números naturales?. Es fácil decir que el menor es el que aparece antes en la sucesión 1,2,3,...pero eso no es muy práctico para números grandes.

Si quiero comprar 1375855 con 976667 no necesito, por suerte, contar desde 1 para ver cuál de los dos aparece primero. Hay una regla práctica, basada en que es muy fácil comparar entre sí los <u>dígitos</u>: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. La regla es:

1. Contar las cifras de los dos números; si uno de ellos tiene más cifras que el otro, es el mayor.
2. Si tienen igual número de cifras, comparar la primera cifra de la izquierda. Si son distintas, la mayor es la del número mayor.
3. Si las primeras cifras coinciden, comparar las segundas, y así sucesivamente.

Estas reglas, en las que hay que hacer cosas distintas según que algo ocurra o no, es mejor representarlas por <u>diagramas de flujo</u> para que no haya confusión. Estos diagramas son cada vez más importantes en todas las actividades técnicas, porque permiten dar una serie de instrucciones complicadas paso a paso y sin que haya dudas.

Por ejemplo, la regla que acabamos de dar para averiguar cuál de los dos números b o c es el mayor, sabiendo comparar número de cifras y dígitos, tiene un diagrama así:



Si por ejemplo b = 7346 y c = 7350, salimos de (1) por <u>sí</u>. En (3) comparamos 7 con 7 y por lo tanto salimos de (4) por <u>sí</u> y de (6) por <u>sí</u>. En (8) comparamos 3 con 3 y la flecha nos hace volver a la pregunta (4), de la que salimos por <u>sí</u> y damos una vuelta más. Pero ahora estamos comparando 4 con 5, de modo que salimos por <u>no</u> y terminamos en que c > b.

Nótese como nos arreglamos para representar el "y así sucesivamente" de la instrucción tercera: o sea correrse un lugar a la derecha y hacer lo mismo que antes. Eso se indica con la flecha que vuelve de (8) a la pregunta (4): "¿son estos dígitos iguales?" y de la cual salen dos flechas distintas, según la contestación.

Además hemos incluído la posibilidad de que los dos números fueran iguales. Eso se ve comparando sucesivamente sus cifras de izquierda a derecha. Si b = c, al llegar al cuadro 4, siempre se sale por flecha "sí". Mientras queden cifras a la derecha, se vuelve a (4). Cuando no quedan más, se sale de (6) por la flecha "no", que nos lleva a la conclusión b = c.

Esta relación < se llama el orden natural de N. Es un orden total: si dos números son diferentes uno de ellos es menor que el otro. Tiene además una propiedad importante: cada número tiene un siguiente: un número mayor pero tal que entre los dos no hay ningún otro 32 > 31, y no hay ningún n ∈ N tal que 31 < n < 32.

Si admitimos fracciones eso no ocurre: entre dos fracciones siempre hay otra. Tampoco hay siguiente para dos puntos de una recta horizontal ordenados de izquierda a derecha.

4.3. PRIMERO Y ÚLTIMO ELEMENTO

En todo esto hemos utilizado repetidas veces la idea de "primero", que conviene definir para un orden cualquiera. Vamos también a definir "último".

Si R es un orden del conjunto A, y p, es un elemento de A que cumple p R x para todos los otros elementos x de A, diremos que p es el primer elemento de A, según R.

Si u ∈ A y cumple x R u para otro elemento x de A, diremos que u es el último elemento de A, según R.

El primer elemento es anterior a todos y el último es posterior a todos.

En N ordenado por ≤ el primer elemento es 1. En cambio no hay último elemento: para cualquire número dado siempre hay otro mayor.

Ordenando N, por la relación ≥ ocurre lo contrario: no hay primer elemento, y 1 es el último.

Si ordenamos los puntos de una recta horizontal de izquierda a derecha, no hay el primero ni último elementos.

Ordenando los conjuntos por inclusión, hay primer elemento: es ϕ, y también hay último: es el conjunto universal I. Usando ⊃ en vez de ⊂ para ordenar, ϕ pasa a ser último e I primero.

Si ordenamos N por la relación "múltiplo", que da un orden parcial, no hay primer elemento, pues no hay ningún número que sea múltiplo de todos. En cambio hay último: es 1, pues x   1 para cualquier x.

Si agregamos el cero, la extensión   tiene ahora primer elemento, pues 0 es múltiplo de todos los números, en N_o.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Identifique el 1o. y último elemento del conjunto.:

Q = {1,2,8,4} ordenado:

a. Como está escrito de derecha a izquierda
b. Por la relación "múltiplo de"
c. "Menor o igual que"
d. "Mayor o igual que"

Desarrollo:

	Primero	Ultimo
* de derecha a izquierda	4	1
* "múltiplo de"	8	1
* "menor o igual que"	1	8
* "mayor o igual que"	8	1

2. Identifique el 1o. y último elemento del conjunto:

P = { x/x $\in$ N < 21 } ordenado por:

a. múltiplos de 2
b. múltiplos de 3
c. divisores de 10
d. múltiplos de 5
e. sucesor de
f. Números primos

Desarrollo:

Tabulamos el conjunto dado:

P={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20}

	Primero	Ultimo
* múltiplos de 2	2	20
* múltiplos de 3	3	18
* divisores de 10	1	10
* múltiplos de 5	5	20
* números primos	2	19

4.4. RELACIÓN DE ORDEN

Una relación R se denomina un orden en un conjunto A, si cumple con las propiedades:

Antisimétrica: $a\ R\ b \wedge b\ R\ a \Rightarrow a = b$ ó
$a\ R\ b \wedge b\ R\ a \Rightarrow a \neq b$

Transitiva: $a\ R\ b \quad b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c$

Si una relación R cumple con las propiedades antes indicadas se denomina Orden Estricto; pero si el cumple con la propiedad reflexiva se llama Orden no Estricto.

Si existen elementos que no están relacionados entre sí (elementos incomparables) el orden es Parcial y si los elementos son comparables o cumple la ley de tricotomía $a\ R\ b$ ó $b\ R\ a \Rightarrow a \neq b$ el orden es Total

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

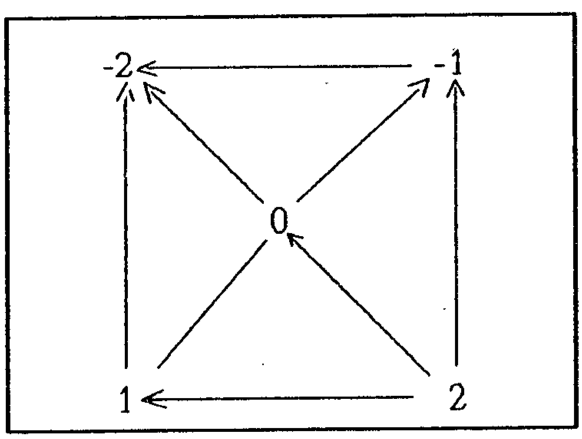
Dados los siguientes ejercicios. Determine el orden al que corresponden:

1. La relación "mayor que" establecida en el conjunto:

$B = \{-2,-1,0,1,2\}$

Desarrollo:

Representemos en un diagrama de flechas la relación:



Observamos inmediatamente que la relación "mayor que" cumple las propiedades:

Antisimétrica porque no hay flechas en doble sentido, es decir si tomamos el par:

$(2,1) \in R \wedge (1,2) \in R$

Transitiva — porque por cada par de flechas consecutivas hay otra que une el origen de la primera con el extremo de la segunda, es decir:

$2 > -1 \wedge -1 > -2 \Rightarrow 2 > -2$

es un orden estricto

2. Sea la relación "anterior a" definida en N.

Desarrollo:

Reflexiva — No cumple porque ningún número es anterior a sí mismo.
Ej: 2 R 2

Antisimétrica — Si se cumple porque todo número que es anterior a otro; éste no puede estar antes que el primero.
Ej: $3 R 4 \wedge 4 R 3$

Transitiva — Si se cumple porque si un número es anterior que otro número y éste anterior que un tercero, entonces el primero es anterior al tercero:
Ej: $3 R 4 \wedge 4 R 5 \Rightarrow 3 R 5$

Luego es una relación de orden estricto por cumplir las propiedades antisimétrica y transitiva.

Analicemos si el ejemplo dado es de orden total o parcial, para lo cual debemos tener presente que cumpla una de las premisas a R b ó b R a con dos elementos cualesquiera. Si elegimos por ejemplo dos elementos, el 7 y el 3 vemos que la premisa 7 antes que 3 no se cumple pero al revés 3 antes que 7 si se cumple. Luego extendiendo este concepto a todos los elementos de N, siempre se cumple una de las dos premisas, por lo tanto se trata definitivamente de un orden total.

3. La relación R = {(2,4),(4,5),(2,5)} definida en el conjunto B={2,4,5}

Desarrollo:

Analicemos las propiedades que cumple la relación dada.

Antisimétrica

$(2,4) \in R \wedge (4,2) \in R$
$(4,5) \in R \wedge (5,4) \in R$
por lo tanto cumple la propiedad.

Transitiva

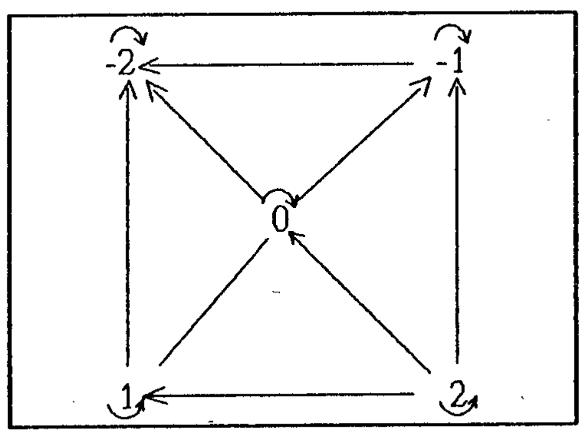
2 R 4 $\wedge$ 4 R 5 => 2 R 5
por lo tanto cumple la propiedad.

En consecuencia la relación dada es de orden estricto.

4. La relación "mayor o igual que" definida en el conjunto: B = {-2,-1,0,1,2}

Desarrollo:

Representemos la relación dada en un diagrama de flechas así:



El diagrama de flechas cumple las propiedades:

Reflexiva — Porque todo número es igual a sí mismo, luego todo número será mayor o igual que el mismo (ya que la relación mayor o igual significa que 2 números están relacionados siempre que uno sea mayor que el otro o bien que sean iguales).

Antisimétrica — porque si a ≥ b $\wedge$ b ≥ a necesariamente a = b

Transitiva — Porque si a ≥ b $\wedge$ b ≥ c ello implica que a ≥ b por lo tanto e sun orden no estricto.

5. Dada la relación "es más pobre que" definida entre personas.

Desarrollo:

Analicemos las propiedades que cumple la relación dada:

Antisimétrica — Si una persona es más pobre que otra, es imposible que ésta sea más pobre que la primera:
a R b $\wedge$ b R a
por lo tanto cumple la propiedad.

<u>Transitiva</u>

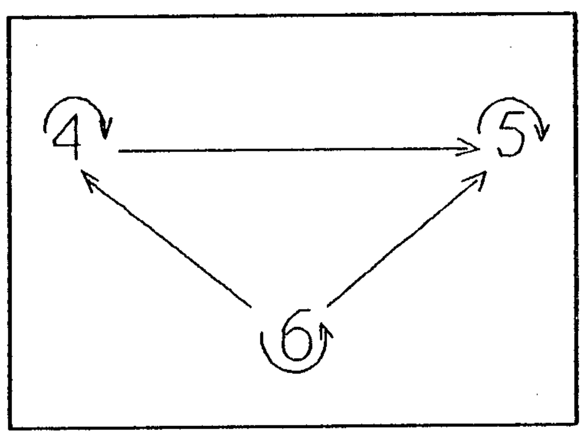
Si una persona es más pobre que una segunda y ésta más pobre que una tercera, entonces la primera es más pobre que la tercera:
$a\ R\ b \wedge b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c$
por lo tanto cumple la propiedad

En consecuencia la relación "es más pobre que" es de orden estricto.

6. La relación R = {(4,4),(5,5),(6,6),(4,5),(6,5),(6,4)} definida en el conjunto A = {4,5,6}

Desarrollo:

Representemos la relación dada en un diagrama de flechas.



<u>Reflexiva</u>

Cumple la propiedad porque cada elemento se relaciona consigo mismo.
$(4,4) \in R$
$(5,5) \in R$
$(6,6) \in R$

<u>Antisimétrica</u>

Cumple la propiedad porque:
$(4,5) \in R \wedge (5,4) \in R$
$(6,5) \in R \wedge (5,6) \in R$
$(6,4) \in R \wedge (4,6) \in R$

<u>Transitiva</u>

Cumple la propiedad porque:
$(4,4) \in R \wedge (4,5) \in R \Rightarrow (4,5) \in R$
$(6,4) \in R \wedge (4,5) \in R \Rightarrow (6,5) \in R$
$(4,5) \in R \wedge (5,5) \in R \Rightarrow (4,5) \in R$

En consecuencia la relación dada es de orden no estricto.

7. Sea la relación "múltiplo de" definida en el conjunto: $A = \{12,6,3,1\}$

Desarrollo:

Formemos la relación con la condición dada:

$R = \{(12,12),(6,6),(3,3),(1,1),(12,6), (6,3), (12,3), (12,1),(3,1),(6,1)\}$

<u>Reflexiva</u> Cumple porque todo número es múltiplo de sí mismo:
$(12,12) \in R$
$(6,6) \in R$
$(3,3) \in R$
$(1,1) \in R$

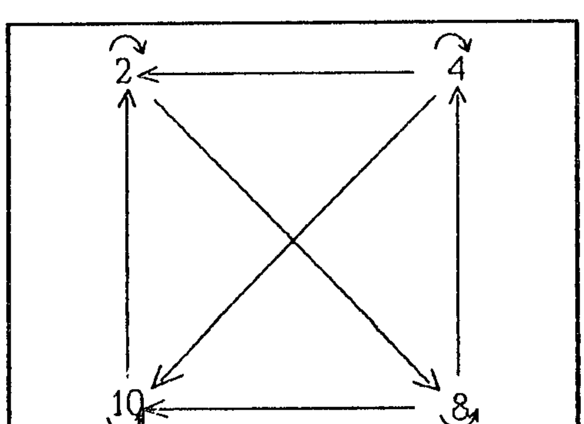
<u>Antisimétrica</u> Cumple porque si un número es múltiplo de otro, éste no puede ser múltiplo del primero:
$(12,6) \in R \wedge (6,12) \in R$
$(6,3) \in R \wedge (3,6) \in R$
$(12,3) \in R \wedge (3,12) \in R$

<u>Transitiva</u> Si cumple:
$(12,6) \in R \wedge (6,3) \in R \Rightarrow (12,3) \in R$
$(6,6) \in R \wedge (6,3) \in R \Rightarrow (6,3) \in R$
$(6,1) \in R \wedge (1,1) \in R \Rightarrow (6,1) \in R$

por lo tanto es un orden estricto total.

En general, la relación "múltiplo de" definida en R es un orden no estricto parcial porque existen elementos incomparables. En el ejemplo propuesto vemos que es de orden no estricto total porque se ha limitado el conjunto.

8. La relación "divisor de" definida en el siguiente diagrama:



Desarrollo:

<u>Reflexiva</u> Cumple la propiedad porque todo número es divisor de sí mismo.
$(2,2) \in R$
$(4,4) \in R$

<u>Antisimétrica</u> Cumple porque si un número es divisor de otro, éste no puede ser divisor del primero.
$(2,4) \in R \wedge (4,2) \in R$
$(4,8) \in R \wedge (8,4) \in R$

<u>Transitiva</u> Cumple porque si un número es divisor de otro y éste divisor de un tercero, entonces el primero es divisor del tercero:
$(2,4) \in R \wedge (4,8) \in R \Rightarrow (2,8) \in R$
$(2,8) \in R \wedge (8,16) \in R \Rightarrow (2,16) \in R$

Por lo tanto "divisor de" es una relación de orden no estricto.

9. Dada la relación "menor o igual que" definida en:
$Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$

Desarrollo:

<u>Reflexiva</u> Cumple la propiedad porque:
$-2 \ R \ -2$
$2 \ R \ 2$

<u>Antisimétrica</u> Cumple la propiedad porque:
$-2 \ R \ 3 \wedge 3 \ R \ -2$
$2 \ R \ 2 \wedge 2 \ R \ 2 \iff a = b$

<u>Transitiva</u> Cumple con la propiedad porque:
$-2 \ R \ 3 \wedge 3 \ R \ 4 \Rightarrow -2 \ R \ 4$
$0 \ R \ 1 \wedge 1 \ R \ -1 \Rightarrow 0 \ R \ -1$

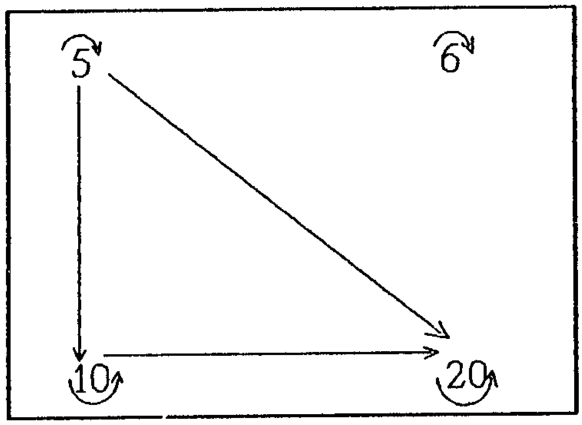
Por lo tanto es un orden no estricto total.

10. Dado el conjunto $B = \{5,6,10,20\}$ y la relación "divide a".

Desarrollo:

Formemos la relación que cumple con la condición dada:

$R = \{(5,10),(5,20),(10,20),(5,5),(6,6),(10,10),(20,20)\}$



Al observar el diagrama de flechas se verifica que cumple las siguientes propiedades:

Reflexiva	$5 \ R \ 5$
Antisimétrica	$5 \ R \ 10 \wedge 10 \ R \ 5$
Transitiva	$5 \ R \ 10 \wedge 10 \ R \ 20 \Rightarrow 5 \ R \ 20$

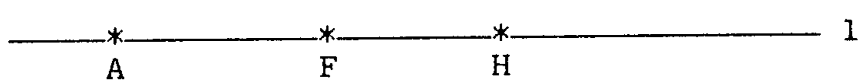
Sin embargo, se puede ver que hay elementos que no están unidos por flechas, es decir que no están relacionados entre sí; estos elementos se denominan <u>incomparables</u>.

Por lo tanto la relación dada es de orden no estricto parcial.

11. La relación "estar a la izquierda de" definida en los puntos de una recta horizontal.

Desarrollo:

Sea la recta l en la que ubicamos los siguientes puntos:



<u>Reflexiva</u> No es reflexiva porque ningún punto está a la izquierda de sí mismo.
Ej: $F \ R \ F$

<u>Antisimétrica</u> Si cumple:
$F \ R \ H \wedge H \ R \ F$

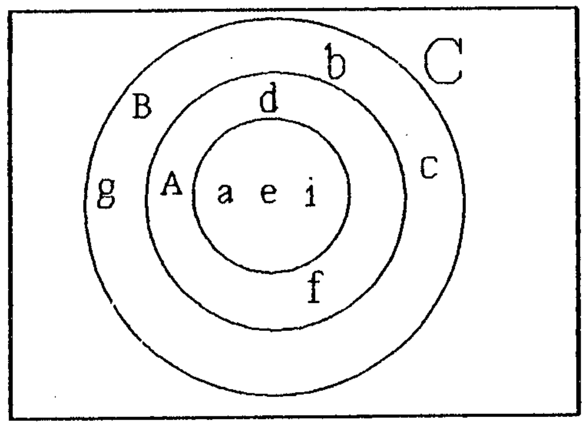
<u>Transitiva</u> Si cumple:
$A \ R \ F \wedge F \ R \ H \Rightarrow A \ R \ H$

Por cumplir las propiedades antisimétrica y transitiva, es un orden estricto total.

12. Dados los conjuntos: $A = \{a,e,i\}$, $B = \{a,e,d,f,i\}$ $C=\{a,b,c,d,e,f,g,i\}$ y la relación "incluído en"

Desarrollo:

Representemos gráficamente la relación dada:



Reflexiva

Si cumple porque todo conjunto es subconjunto de sí mismo.
$A \subset A$; $B \subset B$; $C \subset C$

Antisimétrica

Si cumple:
$A \subset B \wedge B \quad A$

Transitiva

Si cumple:
$A \subset B \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Por lo tanto e suna relación de orden no estricto total.

ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 4

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que le proponemos:

1. Con los elementos del conjunto:

   P = {1,2,3,4,5,...}. Ordene el conjunto de acuerdo a las siguientes condiciones:

   * múltiplos de 2
   * múltiplos de 3
   * divisores de 15
   * divisores de 20
   * mitad de 10

   Luego analice si se trata de órdenes.

2. Escriba 3 ejemplos de cantidades de 7 cifras que cumplen con la primera regla.

3. Escriba 3 ejemplos de cantidades de 8 cifras que cumplan con la segunda regla.

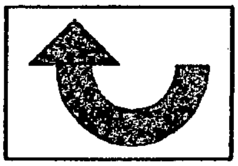
4. Escribir 3 ejemplos de cantidades de 9 cifras que cumplan con la tercera regla.

5. Escriba el primero y último elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) números naturales
   b) partes de una planta
   c) consonantes
   d) puntos de una semirecta
   e) elementos químicos
   f) planetas del sistema solar

6. Dadas las siguientes relaciones haga un análisis de cada una, luego indique el orden al que pertenecen (si es orden).

   a) "a es más rico que b" entre personas
   b) "a murió antes que b" entre personas
   c) "a es más alto que b" entre personas
   d) R = {(1,2),(1,1),(2,3),(2,2),(1,3),(3,3)}
   e) "a es más débil que b" entre animales
   f) "x es menor que y" en los enteros (Z)
   g) "múltiplo de" en los reales.



RESUMEN

RELACION

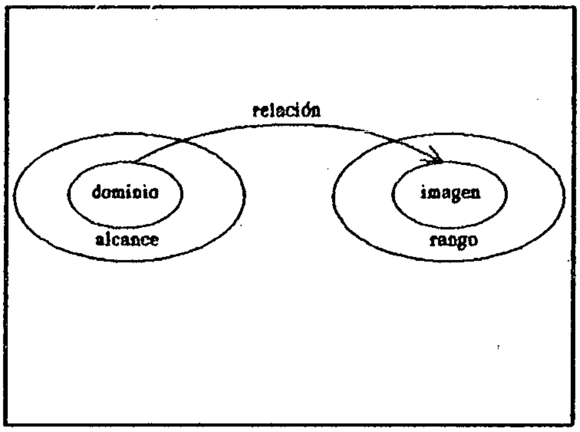
Una relación de un conjunto A es un conjunto B es el conjunto R de pares ordenados que satisfacen una regla, condición o propiedad tales que, el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

$R \subseteq A \times B$

PARTES DE UNA RELACION

1. Conjunto de partida o alcance.- Formado por todos los elementos que pertenecen al primer conjunto (A).
2. Conjunto de llegada o rango.- Formado por todos los elementos que pertenecen al segundo conjunto (B).
3. Dominio.- Formado por las primeras componentes de los pares ordenados que cumplen con la condición dada: $Dm \subset A$
4. Codominio, contradominio o imagen.- Formado por las s e g u n d a s componentes de los pares ordenados que cumplan con la condición. $Im \subset B$

Representando gráficamente:



PROPIEDADES DE UNA RELACION

REFLEXIVA

Si cada elemento a ∈ A está relacionado consigo mismo a

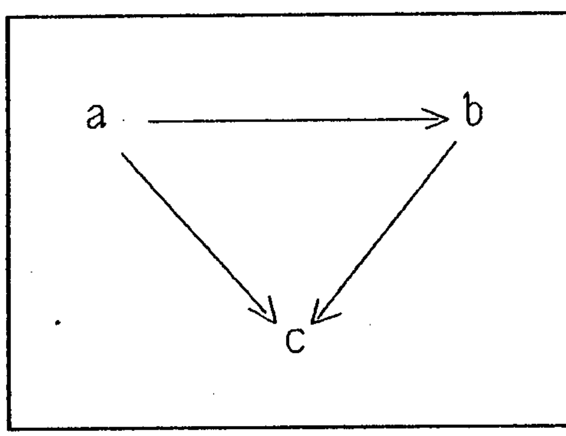
SIMETRICA

Si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a.

$$a \rightleftarrows b$$

TRANSITIVA

Si a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c.



FORMAS PARA DEFINIR RELACIONES

A las relaciones se las puede definir de las siguientes formas:

a) Por descripciones comunes.
b) Mediante tablas.
c) Por medio de fórmulas.
d) Por representación gráfica.

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación R es de equivalencia si cumple simultáneamente las propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

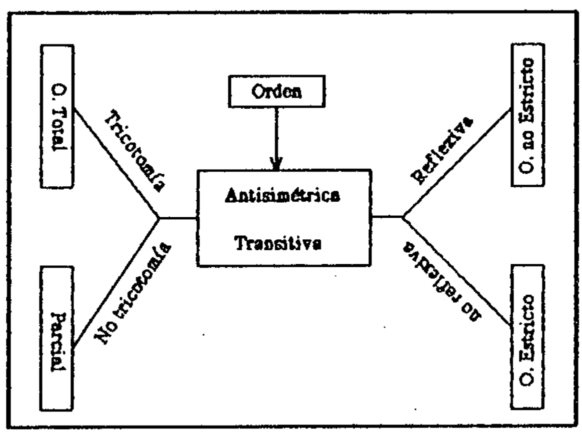
Toda relación de equivalencia definida en un conjunto permite efectuar una partición en dicho conjunto en partes o clases de equivalencia.

En efecto, resulta que toda relación de equivalencia parte al conjunto sobre el que está definida, en subconjuntos que cumplen las siguientes propiedades:

1.- Todos son distintos del vacío.
2.- Son disjuntos dos a dos.
3.- La unión de todos los subconjuntos es el conjunto original.

El conjunto formado por todas las clases de equivalencia recibe el nombre de Conjunto Cociente.

RELACIONES DE ORDEN



VALORE SUS CONOCIMIENTOS

No.1

OBJETIVO 01	Determine el dominio, imagen y las propiedades de una relación binaria.

A continuación le presentamos el siguiente cuestionario, conteste siguiendo las instrucciones que anteceden a cada parte.

A. Escriba en el paréntesis correspondiente una (V) si el enunciado es verdadero o una (F) si es falso.

1.( ) Relación es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados que cumplen una condición.

2.( ) El dominio es un subconjunto del alcance.

3.( ) Relación es un conjunto de pares ordenados cuyas componentes cumplen con una condición.

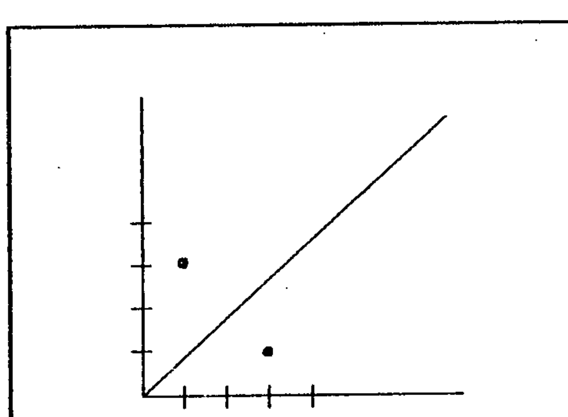
4.( ) La imagen es un subconjunto del alcance.

5.( ) Una relación es reflexiva cuando está relacionada consigo mismo.

6.( ) Una relación es antisimétrica cuando los pares de elementos está unidos por dobles flechas.

7.( ) La forma simbólica de la relación transitiva es:
$a \, R \, b \wedge b \, R \, c \Rightarrow b \, R \, c$

8.( ) El diagrama cartesiano cumple la propiedad simétrica.



B. Encierre en un círculo el literal que corresponde a la respuesta correcta.

9. El dominio de la siguiente relación es:
$R_1 = \{(1,a),(1,e),(2,i),(4,o),(5,o)\}$

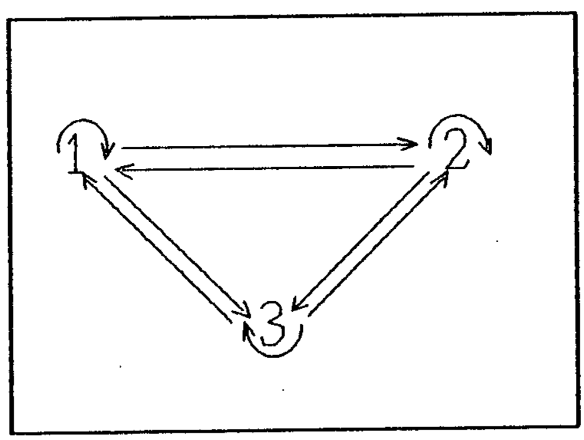
a. {a,e,i,o}
b. {a,e,i,o,u}
c. {1,2,3,4,5}
d. {1,2,4,5}

10. El codominic de la siguiente relación

R_2 = {(1,2),(1,1),(1,3),(2,3),(3,4)}, es:

a. {1,3,4}
b. {1,2,3,4}
c. {1,2,3,5}
d. {1,2,3}

11. Las propiedades que se cumplen en el diagrama siguiente son:



a. reflexiva

b. transitiva

c. simétrica

d. antisimétrica

OBJETIVO 02	Representar una relación de diferentes formas.

A continuación le presentamos el siguiente cuestionario, conteste siguiendo las instrucciones que anteceden a cada parte.

A. Escriba diez relaciones que estén definidas por expresiones comunes, referidas a hechos actuales.

B. Propuesta la siguiente tabla determine:

12. El dominio
13. Codomonio

14. Alcance
15. Rango
16. Imagen de 4 y 5 siendo la relación "a > b"

"a > b"

dominio	imagen
1	0,-1,-2,-3,-4,...
2	1,0,-1,-2,-3,...
3	2,1,0,-1,-2,3,...
4	3,2,1,0,-1,-2,...
5	4,3,2,1,0,-1,...
6	5,4,3,2,1,0,...

C. Escriba en el paréntesis correspondiente una (V) si el enunciado es verdadero o una (F) si es falso.

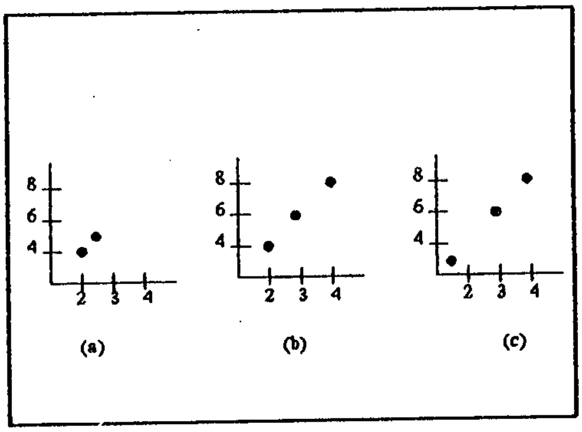
17. ( ) En la primera columna de una tabla se escribe los elementos del codominio.
18. ( ) Las presentaciones gráficas cuando se trabajan con números naturales son conjuntos de puntos separados.
19. ( ) Una relación se la puede definir por medio del producto cartesiano.
20. ( ) Para la representación gráfica de una R utilizamos los diagramas de flechas.
21. ( ) Una relación se la puede definir por medio de fórmulas y gráficamente.
22. ( ) La relación "perpendicular a" simbólicamente se representa a // b
23. ( ) La fórmula correspondiente a "cuadrado de un número disminuído en su duplo es $a^2 + 2a$".
24. ( ) La tabla de la relación "a < b" de alcance y, rango igual naturales y dominio {3,4,5}

"a < b"

dominio	imagen
3	4,5
4	5,6
5	6,7

D. Marque con una (X) en el paréntesis correspondiente la respuesta correcta.

25. ( ) El gráfico que corresponde a la relación 4a = 2b con dominio {2,3,4} es:



26. ( ) La tabla que pertenece a la relación mínimo común múltiplo con dominio = {60,150,168} es:

a ( )

dominio	imagen
60	20,30,60
150	10,15,25
168	8,12,14

b ( )

dominio	imagen
60	20,30,60
150	10,15,25
168	8,12,14

c ( )

dominio	imagen
60	20,60,90
150	10,15,25
168	8,12,14

OBJETIVO 03	Identificar una relación de equivalencia, sus clases y su inversa.

A. Señale con una (X) en el paréntesis correspondiente, la respuesta correcta.

27. Las propiedades que cumple una relación de equivalencia son:

a. ( ) antisimétrica
b. ( ) reflexiva
c. ( ) conmutativa
d. ( ) transitiva
e. ( ) invertiva
f. ( ) simétrica

28. Cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia:

a. ( ) $R_1 = \{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b),(c,c)\}$
b. ( ) $R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$
c. ( ) $R_3 = \{(1,1)\}$
d. ( ) $R_4 = \{(1,2),(1,1),(1,3)\}$

29. Una de las siguientes relaciones es de equivalencia:

a. ( ) "es pariente de" definida entre

personas.
b. ( ) "a > b" en N.
c. ( ) "a es abuelo de" entre personas.
d. ( ) "tiene el mismo número de letras que" entre palabras.

30. Cuál de las siguientes relaciones es la inversa de:

R = {(3,5),(2,4),(1,3),(7,8)}

a. ( ) R^{-1} = {(5,3),(4,2),(3,1),(7,8)}
b. ( ) R^{-1} = {(3,5),(4,2),(3,1),(8,7)}
c. ( ) R^{-1} = {(5,3),(4,2),(3,1),(8,7)}

B.

31. Forme todas las particiones posibles del conjunto, siendo: M = {1,3,5,7,9}

C. 32. Forme la recíproca de la siguiente tabla:

R

4	4	2	1	
6	6	3	2	1
8	8	4	2	1

OBJETIVO 04	Identificar y determinar el orden de una relación, así como el primero y último elemento, respectivamente.

A. En el paréntesis que precede a cada conjunto, escriba la letra que corresponde a la condición que lo caracteriza a cada orden:

33. ( ) 1,2,3,4
34. ( ) 1,2,6,12
35. ( ) 10,9,8,7,6
36. ( ) 8,4,2,1

A mayor que
B múltiplo de
C divisor de
D menor que
E mitad de

B. Escriba el símbolo correcto mayor que, menor que, o igual que entre cada par de cantidades:

37.	2 2 2 2 2	2 2 2 2 2 2
38.	84328	74328
39.	398534	363421
40.	555332	55533
41.	8576123	8576123

C. Determine el primero y último elementos de cada uno de los siguientes conjuntos de acuerdo a la condición que se establece.

	Primero	Ultimo
42. {-2,-1,0,...} "mayor que"	________	________
43. {7,3,4,5,1,2,6} "sucesor de"	________	________
44. {4,3,0,2,5,1} "antecesor de"	________	________
45. {0,1,9,8,2,5,4,7,3,6} "números primos"	________	________

D. Escriba una (X) en el paréntesis que corresponde a la respuesta correcta.

46. De la lista de propiedades que se escriben a continuación, cuáles corresponden a un orden no estricto.

    a. Simétrica ( )
    b. Antisimétrica ( )
    c. Ley de tricotomía ( )
    d. Transitiva ( )
    e. Reflexiva ( )

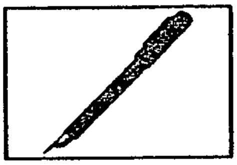
47. Cuál de las relaciones pertenece a un orden no estricto.

    a. "es madre de" definida entre personas. ( )
    b. "es paralelo a" definida entre rectas. ( )
    c. "tienen el mismo número de letras que" definida entre palabras. ( )
    d. "es mayor que" definida en N. ( )

E. Escriba un ejemplo de cada una de las relaciones.

48. Orden estricto ____________________
49. Orden no estricto ____________________
50. Orden estricto total ____________________
51. Orden no estricto parcial ____________________

Compare las respuestas de la autoevaluación con las del solucionario.



CLAVE DE RESPUESTAS

Objetivo 01

A.
1. (F) Esta corresponde al dominio de una relación.
2. (V)
3. (V)
4. (F) Porque la imagen es un subconjunto del rango.
5. (V)
6. (F) Porque ésta corresponde a una relación simétrica.
7. (F) La forma simbólica es: $a\ R\ b \wedge b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c$
8. (V)

B.
9. d
10. b
11. a,b,c

Objetivo 02

B.
12. Dominio = N < 7
13. Codominio = Z
14. Alcance = N
15. Rango = Z
16. Im (4) = {3,2,1,0,-1,...}
17. Im (5) = {4,3,2,0,-1,...}

C.
18. (F) Es falsa porque en la primera columna de una tabla se anota el dominio.
19. (V)
20. (F) Es falsa porque una relación se la puede definir por frases, mediante tablas, por medio de fórmulas y gráficamente.
21. (F) Es falsa para la representación gráfica de una relación se utiliza el diagrama cartesiano.
22. (V)
23. (F) Es falsa porque el símbolo empleado corresponde a paralela.
24. (F) Porque la fórmula correcta es: $a^2 - 2a$
25. b
26. a

Objetivo 3

A.
27. b,d,f
28. b,c
29. d
30. c

B. 31. Se forman 33 particiones diferentes. Lo invitamos a que las forme.

C. 32.

R^{-1}

1	4,6,8
2	4,6,8
3	6
4	4,8
6	6
8	8

Objetivo 04

A. 33. (D) 34. (C) 35. (A) 36. (B)

B. 37. $<$, 38. $>$, 39. $>$, 40. $>$, 41. $=$

C. 42. el primero no hay, el último -2
43. el primero es 7, el último 1
44. el primero es 0, el último 5
45. el primero 2, el último 3

D. 46. b(x), d(x), e(x)
47. d(x)

COMENTARIO

Al finalizar el estudio de los contenidos de las cuatro unidades que conforman el módulo I, es necesario analizar los resultados tanto parciales como del módulo.

Después del estudio de cada unidad confiamos en que los objetivos planteados hayan alcanzado el punto de corte necesario para su aprobación, esto es el 70% en cada uno de ellos. Si por el contrario no alcanzó el porcentaje indicado debe Ud. reforzar sus conocimientos, procediendo a revisar nuevamente los temas correspondientes a los objetivos que no logró acreditar.

La autoevaluación propuesta al final del módulo I, comprende los aspectos más importantes y básicos para que le permitan continuar con el estudio de las siguientes unidades.

Le recordamos no pasar al siguiente módulo si no está seguro de los aprendizajes conseguidos, ya que el carácter sistemático de la asignatura le impide comprender los temas que se estudiarán en los módulos posteriores. Lo cual le permitirá realizar con éxito la prueba presencial.

BIBLIOGRAFIA

1. BRITTON, Jack R. e Ignacio Bello: Matemática Contemporánea, México, Ed. Harla, 1979, 730 p.

2. GIL, José y otros: Enciclopedia Básica de Matemática Moderna, Tomo II, Madrid, E.G.B. Educación Santillana, 1972, 184 p.

3. HERNANDEZ, Francisco y otros: Matemática para todos (Enciclopedia Universal de Matemáticas, Volúmen I), España, Ed. Ortells, 1982, 153 p.

4. LONDOÑO, Nelson y Hernando Bedoya: Serie de Matemática Progresiva, Ed. Norma, 1991, 321 y 383 p.

5. SEYMOUR, Lipschutz, PhD (1964): Teoría de Conjuntos y Temas Afines, Primera edición, Colombia, Ed. Andes, 239 p.

6. VARSAVSKY, Oscar (1973): Algebra para Escuelas Secundarias, Argentina, Ed. Universitaria de Buenos Aires, 190 p.

7. WILLS, Darío y otros: Matemática Moderna Estructurada, Volúmen 3,6, Colombia, Ed. Norma 1976, 252, 294 p.

MODULO 2 | F U N C I O N E S

INTRODUCCION SEGUNDO MODULO

El amplio mundo de la matemática se va abriendo a su alrededor, volviéndose su estudio cada vez más fascinante e interesante.

Pero esto y después de conocer los Fundamentos Básicos de Relaciones Binarias, su tarea será entonces comprender perfectamente su contenido y a abstraer el conocimiento, para en base de ello poder continuar adelante.

El presente módulo enfoca un tipo particular de relaciones que tiene gran importancia en el estudio de la Matemática y que toma el nombre de Aplicación o Función, las formas de representarla, su clasificación y la composición de las mismas.

El contenido científico de cada unidad ha sido prolijamente elaborado a fin de que su comprensión sea rápida y total, los ejercicios desarrollados y propuestos que hemos seleccionado cuidadosamente le darán a Ud. una mayor seguridad y afianzarán su conocimiento.

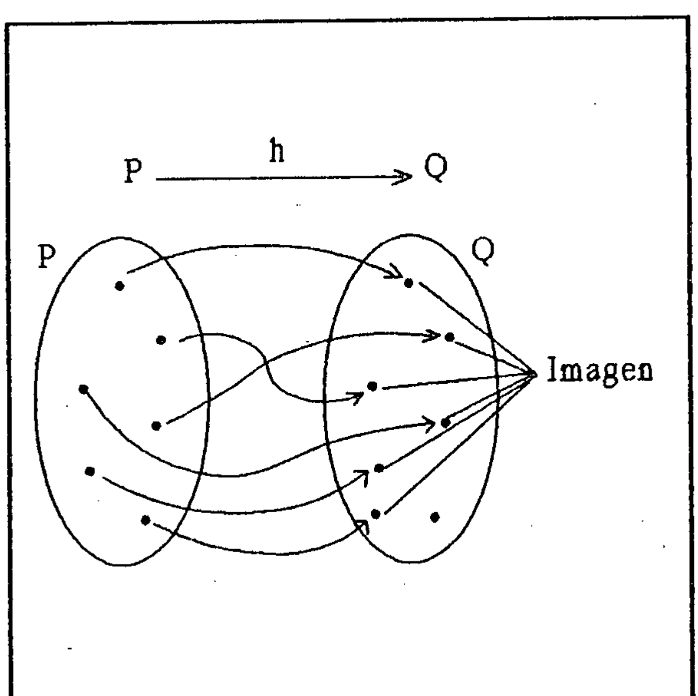
La ejercitación completa y el aprendizaje diario son indispensables en el estudio de esta asignatura, por esta razón usted deberá desarrollar todos los ejercicios así como la autoevaluación propuestos en el documento, siguiendo los pasos indicados en el mismo.

La primera evaluación presencial gratificará su esfuerzo al obtener, luego de su estudio, óptimos resultados.

OBJETIVO 2	Comprender el concepto de función y en base a ello reconocer sus elementos y analizar las clases de funciones.

UNIDADES	SEGMENTOS
5. Nociones Básicas.	5.1. Concepto y notación de funciones. 5.2. Elementos de una función. 5.3. Extensión de funciones.
6. Formas de representar funciones.	6.1. Por descripciones comunes. 6.2. Funciones dadas por tablas. 6.3. Funciones dadas por fórmulas. 6.4. Funciones dadas por gráficos.
7. Clases de funciones.	7.1. Función Inyectiva. 7.2. Función Sobreyectiva. 7.3. Función Biyectiva. 7.4. Función inversa, propiedades y cálculo.
8. Composición de funciones.	8.1. Definición. 8.2. Cálculo de funciones compuestas. 8.3. Propiedades.

UNIDAD 5: DEFINICIONES BASICAS	5.1. Concepto y notación de funciones. 5.2. Elementos de una función. 5.3. Extensión de funciones.



OBJETIVO 05	Diferenciar una función de una relación y calcular el dominio e imagen.

5.1. ¿CÓMO DEFINIMOS UNA FUNCIÓN?

En nuestro lenguaje común siempre estamos empleando expresiones como las siguientes: la función de balet empieza a las 20h00. Una de las funciones del Comisario es velar por la buena marcha y aseo de un centro comercial. La función del actual Presidente de la República se inició el 10 de Agosto de 1992.

En matemáticas la palabra función se la utilizará para expresar que una condición depende de la otra.

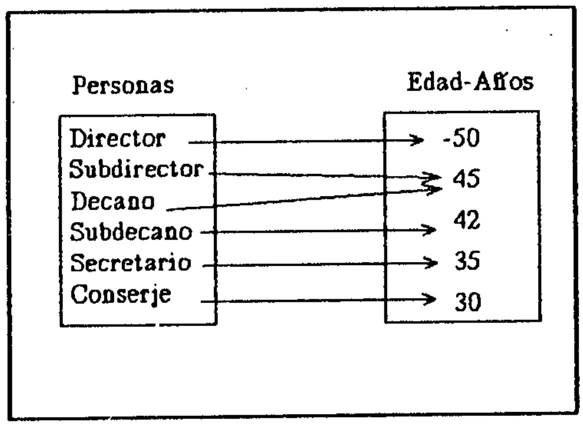
Así el área de un rectángulo, en función de la base y la altura. De tal forma el concepto de función nos da la idea de una relación definida entre los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto.

Imaginemos un conjunto de personas que laboran en un Departamento de la U.T.P.L., formado por: el Director, el Subdirector, Decano, Subdecano, Secretario y Conserje. Vamos a suponer que el Director tiene 50 años, el Subdirector 45, el Subdecano 42, la Secretaria 35, el Conserje 30, formemos dos conjuntos: en el conjunto A de personas que laboran en el departamento de la u.T.P.L., y el conjunto B formado por sus resepectivas edades.

A = {Director, Subdirector, Decano, Subdecano, Secretario, Conserje}

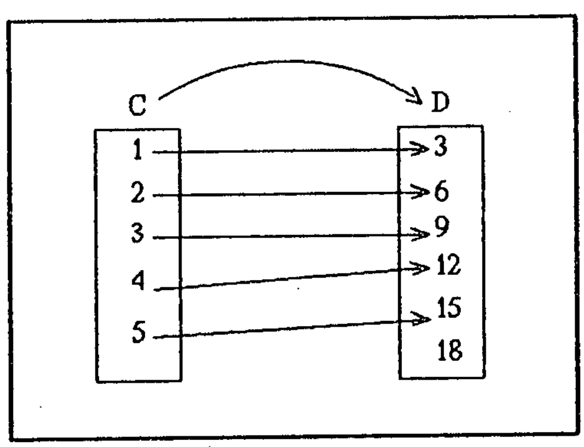
B = {50, 45, 42, 35, 30}

Representemos estos conjuntos mediante diagrama sagital.



Observamos que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento del segundo conjunto, de este modo hemos establecido una correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos.

De igual forma observemos el siguiente diagrama:



$$R = \{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12),(5,15)\}$$

En el diagrama podemos ver que a cada elemento del primer conjunto, le corresponde un solo elemento del segunto conjunto, lo cual se indica con la flecha respectiva, esto es, que a un mismo elemento de D, llega al menos una flecha de un elemento de C.

En el conjunto de pares ordenados, si tomamos dos pares cualesquiera de R, podemos ver que no tienen el mismo primer elemento.

A este tipo de correspondencias o relaciones se las llama <u>funciones, aplicaciones o transformaciones</u>.

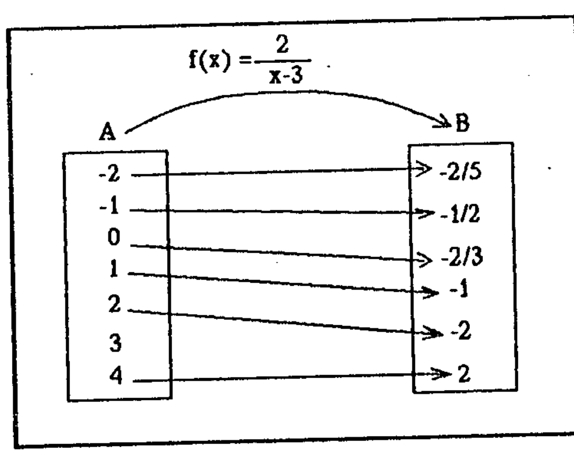
EN CONSECUENCIA:

Función es una relación entre dos conjuntos A y B (no vacíos) que cumplen con una condición, en la cual todo elemento del conjunto A tiene una sola imagen en el conjunto B.

Pero, este concepto es un tanto limitado porque puede presentarse casos en que alguno o algunos elementos del dominio no tengan su imagen en el codominio, sin embargo no dejan de ser funciones.

EJEMPLO: $f\ (x) = \dfrac{2}{x - 3}$ definida en los R

Representemos gráficamente y comprobemos que el elemento 3 no tiene imagen en el conjunto B.



NOTACION

Existen varias notaciones usuales para denotar funciones.

1.- $f: x \longrightarrow y$ Se lee "f es la función de x hacia y". Esta definición es genérica y no específica.

2.- $x \xrightarrow{f} f(x)$ Se lee "por la función f, x se aplica sobre f(x)"

3.- {(x,y)/y = f(x)} — Se lee "f es la función cuyos pares ordenados son (x,y) donde la regla es y = f(x)"

4.- f: y = f(x) — Se lee "f es la función determinada por la regla y = f(x)". Es una forma abreviada de (3).

5.- f: (x,y) — Se lee "f es la función constituída por el conjunto de pares ordenados (x,y)". Dos pares ordenados pueden estar determindos por una regla dada o en los casos sencillos pueden enumerarse.

6. f: A -----> B — Se lee "f es una función de A en B" ó "f manda a A en B"(entre conjuntos).

En las notaciones 2,3 y 4 aparece el símbolo f(x). Este símbolo se lee "f de equis" y representa "el valor de la función en x" y como tal, es un elemento del dominio de imagen f(x). El par ordenado (x,y) podrá también escribirse:
(x, f(x)). No debe confundirse f, que es la función, con f(x) que es el valor de la función en x.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

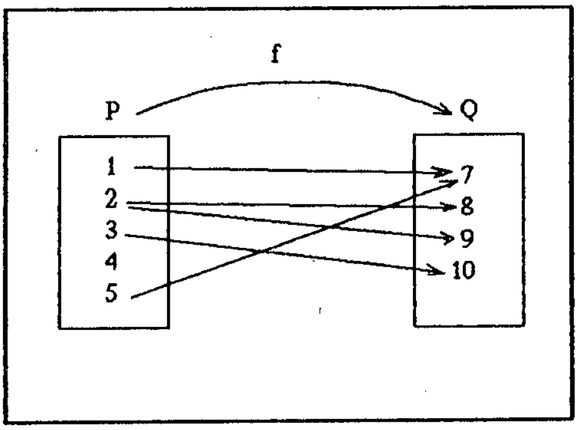
A. Determine si las siguientes relaciones son funciones:

1.- Dado P = {1,2,3,4,5}; Q = {7,8,9,10}; y la relación f definida de P en Q mediante el siguiente conjunto de pares ordenados.

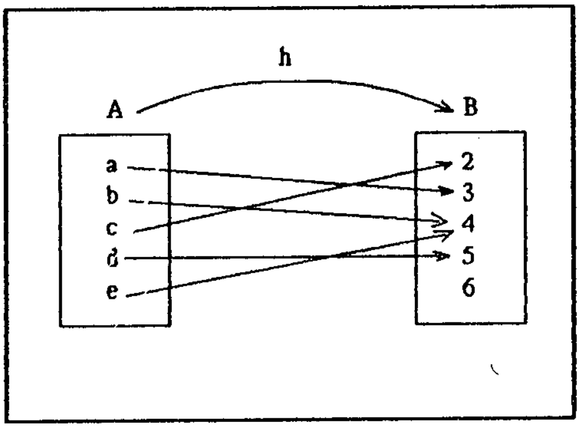
{(1,7),(2,8),(4,9),(3,10),(2,9),(5,7)}

Desarrollo:

La relación de P en Q no es una función porque dos pares ordenados tienen la misma primera componente, como lo demostramos gráficamente, que del elemento 2 nacen 2 flechas.



2.- Sean los conjuntos:
A = {a,b,c,d,e}, B = {2,3,4,5,6} y la relación h definida mediante el siguiente diagrama sagital:



Desarrollo:

La relación h de A en B es una función porque de todo elemento del conjunto A sale una sola flecha a algún elemento del conjunto B.

Lo demostramos formando el conjunto de pares ordenados:

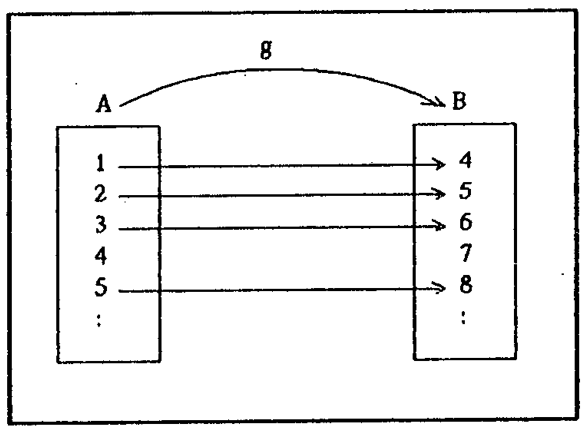
{(a,3),(b,4),(c,2),(d,5),(e,4)}

Luego del análisis de los ejemplos anteriores podemos decir:

- Que la definición de funciones no pone restricciones a los elementos del conjunto de llegada (codominio), de tal forma que puede haber elementos en el segundo conjunto que no estén relacionados con elementos del primer conjunto y elementos del segundo conjunto que le corresponden más de un elemento en el primer conjunto.

- Que las funciones constituyen un caso particular de las relaciones y de esta manera podemos afirmar que toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

3.- $x + 3$ definida en los N



$R = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,5),(5,8)\}$

Desarrollo:

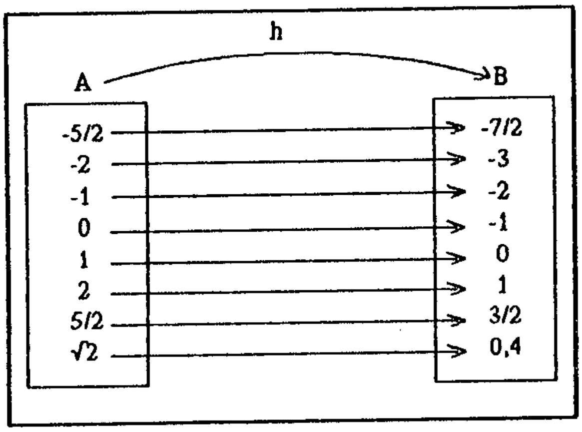
La relación $x + 3$ definida en los N, si es una función porque en el gráfico observamos que cada elemento de A tiene su imagen en B.

B. Cuáles de los siguientes conjuntos representan una función:

1.- $h = \{(x,y)/x,\ y \in R,\ y = x - 1\}$

Desarrollo:

Tomemos algunos elementos del conjunto de los reales y determinemos la imagen de cada uno de ellos. Por lo cual podremos decir si el ejemplo planteado es o no una función.



$y = x - 1$

Si $x = -5/2 \Rightarrow y$

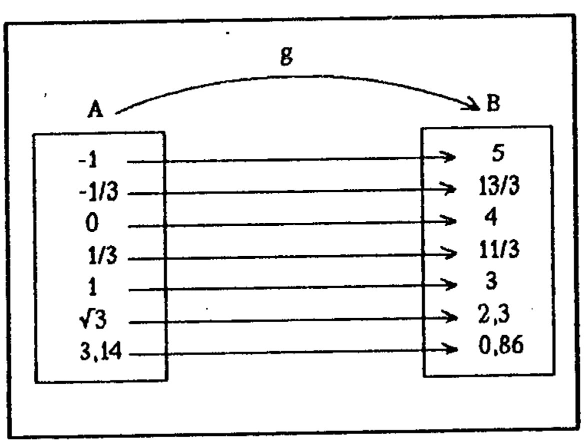
$= -5/2 - 1$

$y = \frac{-5-2}{2}$

$y = -7/2$

Por lo tanto h es una función

2.- $g = \{(x,y)/x,\ y \in R,\ y = 4 - x\}$



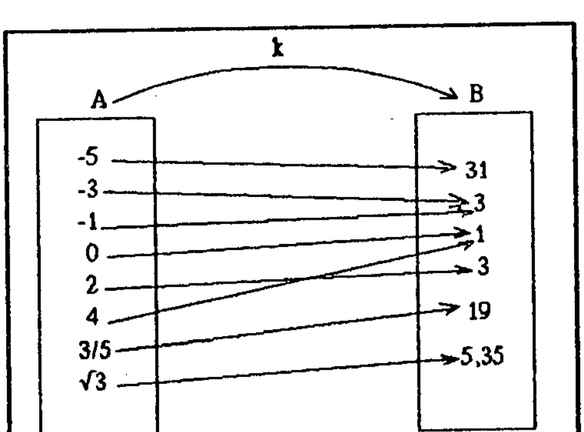
$y = 4 - x$

Si $x = -1 \Rightarrow y = 4 - (-1)$

$y = 4 + 1$

$y = 5$

3.- $k = \{(x,y)/x,\ y \in R,\ y = x^2 - x + 1\}$



$y = x^2 - x + 1$

Si $x = -5 \Rightarrow y = (-5)^2 - (-5) + 1$

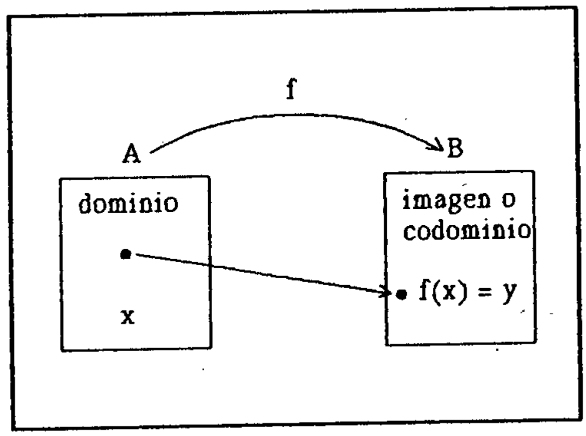
$y = 25 + 5 + 1$

$y = 31$

Por lo tanto k si es una función.

5.2. ELEMENTOS DE UNA FUNCIÓN

El siguiente gráfico nos permitirá identificar los elementos de una función.



1. El conjunto A, se llama <u>dominio</u> de la función (f) y la denotamos por Dom(f) = A

2. El conjunto B, se llama <u>codominio o imagen de la función</u> y lo denotaremos por Cod(f) ó Im(f).

   Al hablar de codominio de una función es poder decir que clase de valores puede tomar la función, sin que sea necesario detallar el dominio de imágenes. Así, podemos hablar de funciones reales, esto es, funciones cuyo codominio es R.

   También podemos considerar una función de valores complejos, esto es, funciones cuyo dominio son los números complejos, o una función de valores enteros, esto es, funciones cuyo codominio es el conjunto de los números enteros, etc.

■ EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- La función f(x) = 3x - 1 ; f: z ---> z. Hallar:

a) El dominio
b) El codominio

Desarrollo:

El conjunto dominio está formado por números enteros que los tomamos en forma arbitraria.

a) Dom (f) = {-5,-3,-1,0,1,2,3}

Para el codominio (f(x)) se reemplazan los valores dados a x, en la función, así:

$$y = 3x - 1$$

Si x = - 5 => y = 3 (-5) - 1 = - 15 - 1 = - 16

Si x = - 3 => y = 3 (-3) - 1 = - 9 - 1 = - 10

Si x = - 1 => y = 3 (-1) - 1 = - 3 - 1 = - 4

Si x = 0 => y = 3 (0) - 1 = 0 - 1 = - 1

Si x = 1 => y = 3 (1) - 1 = 3 - 1 = 2

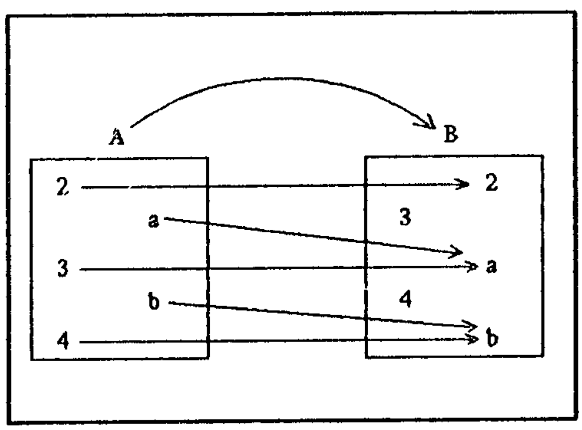
Si x = 2 => y = 3 (2) - 1 = 6 - 1 = 5

Si x = 3 => y = 3 (3) - 1 = 9 - 1 = 8

b) Im(f) = {-16,-10,-4,-1,2,5,8}

2.- Dado el conjunto A = {2,a,3,b,4} donde

h: A ----> A se define por:



Hallar: la imagen de h(2), h(a), h(3), h(b) y h(4)

Desarrollo:

h(2) = 2
h(a) = a
h(3) = a
h(b) = b
h(4) = b

3.- Sea $f(x) = 3x^2-2x-5$. Determinar f(0), f(-1), f(a), f(b), f(a+b), f(a-b)

Desarrollo:

Para encontrar el conjunto imagen reemplazamos el valor de cada elemento del dominio en la función dada:

$f(x) = 3x^2-2x-5$

$f(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 5 = - 5$

$f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 5 = 3 + 2 - 5 = 0$

$f(a) = 3a^2-2a-5$

$f(b) = 3b^2-2b-5$

$f(a+b) = 3(a+b)^2 - 2(a+b) - 5 = 3a^2+6ab+3b^2-2a-2b-5$

$f(a-b) = 3(a-b)^2 - 2(a-b) - 5 = 3a^2-6ab+3b^2-2a+2b-5$

4.- Sea f una función de R en R, $f(x) = x - 3$. Determinar el dominio y la imagen.

Desarrollo:

$$f(x) = x - 3$$

$f(-3) = - 3 - 3 = - 6$

$f(-2) = - 2 - 3 = - 5$

$f(0) = 0 - 3 = -3$

$f(1/2) = 1/2 - 3 = -5/2$

$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 3 = 1,4 - 3 = - 1,6$

$f(3) = 3 - 3 = 0$

$f(-1/2) = - 1/2 - 3 = - 7/2$

por lo tanto: $\mathrm{Dom}(f) = R$
$\mathrm{Im}(f) = R$

5.- Sea f una función de R en R. En cada uno de los siguientes casos, simplifique la escritura de f(x) y calcule:

f(-1) y f(2)

5.1. $f(x) = (x - 1)^2 + (2 - x)(2 + x)$

5.2. $f(x) = (3x + 2)(2 - x) - 3x(x - 7/3)$

Desarrollo:

5.1. $f(x) = (x - 1)^2 + (2 - x)(2 + x)$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 4 - x^2$

$f(x) = - 2x + 5$

$f(-1) = - 2(-1) + 5 = 2 + 5 = 7$ sol.

$f(x) = - 2x + 5$

$f(2) = -2(2) + 5 = -4 + 5 = 1$ sol.

5.2. $f(x) = (3x + 2)(2 - x) - 3x(x - 7/3)$

$f(x) = -6x^2 + 11x + 4$

$f(-1) = - 6(-1)^2 + 11(-1) + 4$

$f(-1) = -6 - 11 + 5 = - 13$ sol.

$f(2) = - 6(2)^2 + 11(2) + 4$

$f(2) = - 24 + 22 + 4 = 2$ sol.

6.- Sea la función f determinada por $f(x) = x^2 + 5x - 6$, con dominio el conjunto de todos los números reales, encontrar:

$f(\sqrt{2})$, $f(x - 2)$, $f(x + h)$

Desarrollo:

$$f(x) = x^2 + 5x - 6$$

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 5 (\sqrt{2}) - 6$

$= 2 + 5(\sqrt{2}) - 6$

$= 2 + 7 - 6$

$f(\sqrt{2}) = 3$ sol.

$f(x - 2) = (x - 2)^2 + 5(x - 2) - 6$

$= x^2 - 4x + 4 + 5x - 10 - 6$

$f(x - 2) = x^2 + x - 12$ sol.

$f(x + h) = (x + h)^2 + 5(x + h) - 6$

$= x^2 + 2hx + h^2 + 5x +5h - 6$ sol.

7.- Hallar el dominio e imagen de: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Desarrollo:

Una función no necesita estar dada por una fórmula pero, se la puede dar por una combinación de varias fómulas, utilizando otras muy distintas para subconjuntos diferentes del dominio.

Para resolver este tipo de funciones procedemos de la siguiente manera:

a) Tabulamos las desigualdades:

$x \geq 0$ ----> [0,1,2,3,4,...,+α[

$x < 0$ ---->]0,-1,-2,-3,...,-α[

b) Al tabular cada una de las desigualdades obtenemos el dominio.

Dom(f) = R

c) Para obtener el codominio o imagen reemplazamos cada elemento del dominio en la expresión que se encuentra a la izquierda de las desigualdades y si es un valor constante se lo asigna para cada valor que tome x según indique la función correspondiente. Así:

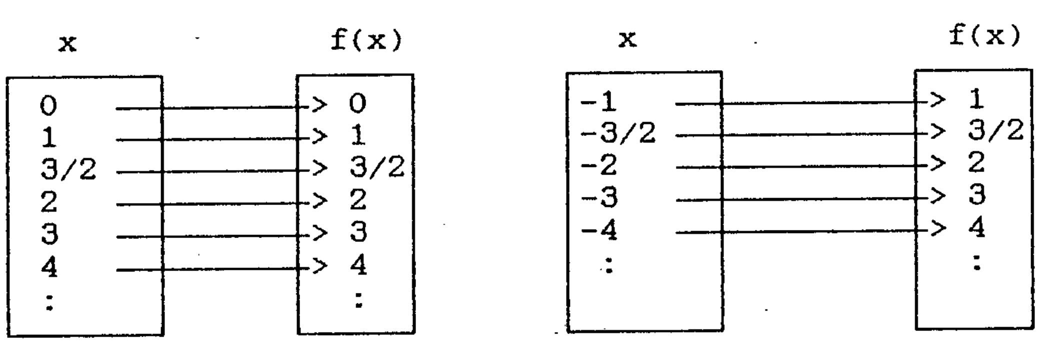
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Para cada x mayor o igual a cero (0) se asigna el mismo número: f(0) = 0; f(1) = 1; f(2) = 2; f(3) = 3; etc.

Para todo número negativo se asigna el mismo número a - x ; f(-1)=1; f(-2) = 2; f(-3) = 3; f(-4) = 4; etc.

A los valores obtenidos los representamos en el diagrama.

El mismo que nos permite identificar el dominio y codominio.



Dom (f) = R
Im (f) = R ≥ 0 sol.

8.- Hallar el dominio e imagen de:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leq x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 2 \\ x, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Desarrollo:

Tabulamos las desigualdades

$-3 \leq x < -1 \Rightarrow [-3,-2,-1,[$
$-1 \leq x < 2 \Rightarrow [-1,0,1,2[$
$2 \leq x \leq 5 \Rightarrow [2,3,4,5]$

Luego el dominio está dado por el siguiente intervalo:

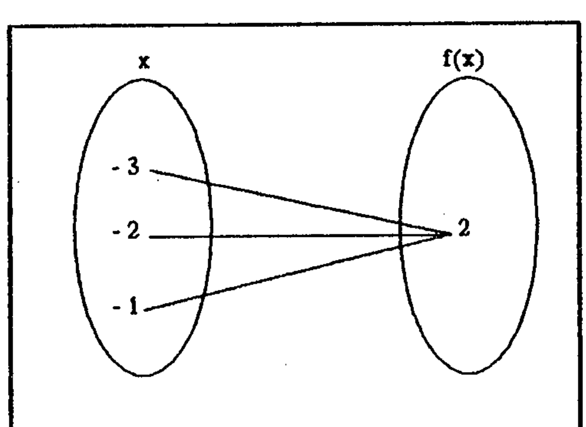
Dom (f) = $[-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5]$ ó

Dom (f) = $-3 \leq x \leq 5$

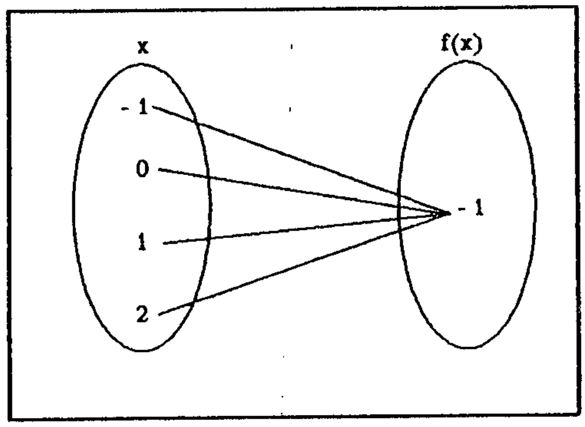
Encontramos el codominio de la siguiente manera:

a) Como la expresión que se encuentra a la izquierda de la primera desigualdad, es una constante, entonces, hacemos corresponder a cada valor del intervalo la constante dada. Para mayor comprensión lo expresamos en el diagrama de Venn, así:

$f(x) = \{2, -3 \leq x < -1\}$ $[-3,-2,-1[$

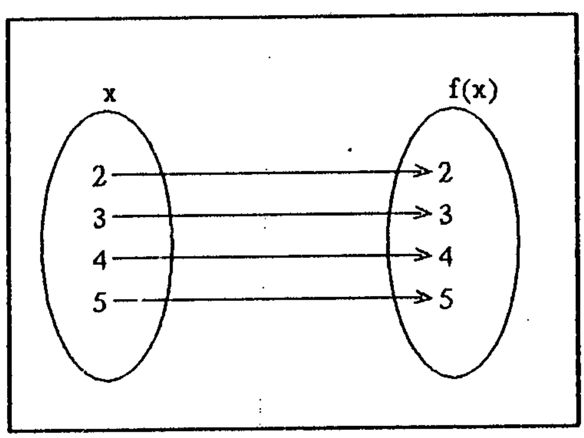


b) $f(x) = \{-1, -1 \leq x < 2\}$ $[-1,0,1,2[$



c) Como la expresión que se encuentra a la izquierda de la tercera desigualdad es una variable, se le asigna el mismo valor del dominio, como lo indicamos en el siguiente diagrama:

$f(x) = \{x, 2 \leq x \leq 5\}$ $[2,3,4,5]$



d) Para determinar el conjunto imagen tomamos los elementos de los siguientes conjuntos, f(x): Así:

$$Im(f) = \{-1,2,3,4,5\}$$

Valle de Sartenejas, 1974

Es necesario que comprenda usted bien los razonamientos efectuados, porque es muy importante que usted trabaje correctamente con las funciones definidas mediante llaves, por esto lo hemos razonado y explicado con tanto detalle. A medida que usted se vaya habituando a trabajar con las funciones definidas de esta forma, puede ir omitiendo.

9.- Hallar el dominio e imagen de:

$$g(x) = \begin{cases} -x \ , & -5 \leq x < -1 \\ 3 \ , & -1 \leq x < 2 \\ 2x, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$-5 \leq x < -1$ ----> [-5,-4,-3,-2,-1[

$-1 \leq x < 2$ -----> [-1,0,1,2[

$2 \leq x \leq 5$ -----> [2,3,4,5[

Por lo tanto: Dom(g) = [-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5]

Dom(g) = $-5 \leq x \leq 5$ sol.

Determinemos las imágenes de la función:

$f(x) = \{x, \ -5 \leq x < -1\}$

x	-5	-4	-3	-2	-1
f(x)	5	4	3	2	1

$f(x) = \{-3, \ -1 \leq x < 2\}$

x	-1	0	1	2
f(x)	3	3	3	3

$f(x) = \{2x, \ 2 \leq x \leq 5\}$

x	2	3	4	5
f(x)	4	6	8	10

2x

si $x = 2 \Rightarrow 2(2) = 4$

Por lo tanto Im(f) = {1,2,3,4,5,6,8,10} sol.

10.- Dado el conjunto A = {-2,-1,0,1,2} y la función h: A-->R, $h(x)=x^2-3$. Hallar el codominio o imagen de h.

Desarrollo:

Calculamos la imagen de cada uno de los elementos de A.

$f(x) = x^2 - 3$

$f(-2) = (-2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$f(-1) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = - 2$

$f(0) = (0)^2 - 3 = 0 - 3 = - 3$

$f(1) = (1)^2 - 3 = 1 - 3 = - 2$

$f(2) = (2)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

Por lo tanto $Im(h) = \{-3,-2,-1\}$ sol.

11.- Sea la función g:Z---->Z definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 4x - 2, \text{ si } x > 4 \\ 6x + 4, \text{ si } x < - 4 \\ 2x^2 + 1, \text{ si } -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Determinar:

a) $h(6)$; b) $h(-5)$; c) $h(-1)$

Desarrollo:

a) Interpretemos las desigualdades.

$x > 4 \Rightarrow]4,5,6,7,\ldots,\alpha[$
$x < -4 \Rightarrow]-4,-5,-6,-7,\ldots,-\alpha[$
$-4 \leq x \leq 4 \Rightarrow [-4,-3,-2,\ldots,4]$

b) Calculemos la imagen de cada uno de los elementos dados, empleando la fórmula más apropiada de las tres.

- Como el elemento $h(6)$ está incluído en el primer intervalo, se emplea la fórmula:

  $h(x) = 4x - 2$

  $h(6) = 4(6) - 2$

  $h(6) = 22$

- Como el elemento $h(-5)$ está incluído en el segundo intervalo, se emplea la fórmula:

  $h(x) = 6x + 4$

  $h(-5) = 6(-5) + 4$

  $h(-5) = -30 + 4$

$$h(-5) = -26$$

- Como el elemento f(-1) está incluído en el tercer intervalo, se emplea la fórmula:

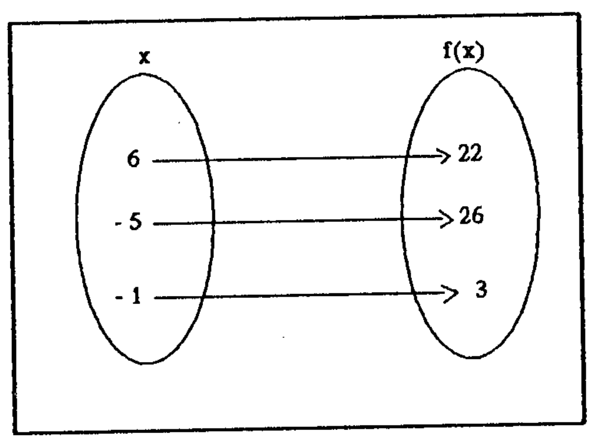
$$h(x) = 2x^2 + 1$$

$$h(-1) = 2(-1)^2 + 1$$

$$h(-1) = 2 + 1$$

$$h(-1) = 3 \text{ Sol.}$$

- La imagen de los elementos indicados es:



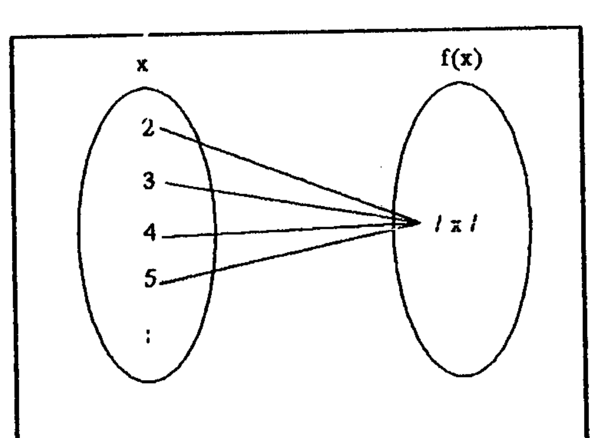
12.- Dada la función $g(x) = \begin{cases} /x/, & x \geq 2 \\ 2, & x < 2 \end{cases}$

Hallar el dominio y codominio.

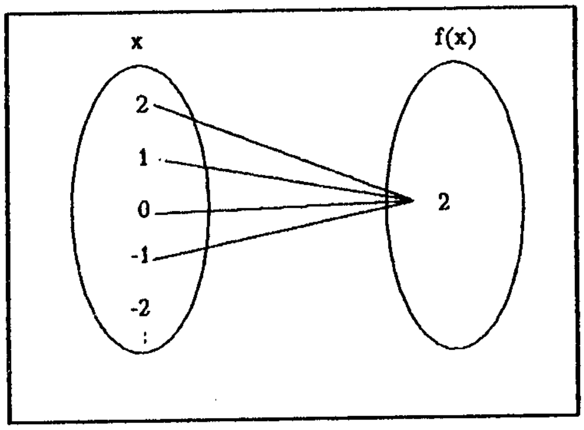
Desarrollo:

$x \geq 2$ ----> $[2,3,4,5,\ldots,\alpha[$

$x < 2$ ----> $]2,1,0,\ldots,-\alpha[$



{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}



{(2,2),(1,2),(0,2),(-1,2),(-2,2)}

Por lo tanto: Dom(g) = R

Im(g) = R ≥ 2 sol.

13.- Determinar el dominio y el recorrido de las siguientes funciones definidas como a continuación se indican:

a) $$f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$$

Desarrollo:

Recordemos que a la función las podemos expresar por:

$$y = \frac{x - 1}{x - 2}$$

Para que la expresión sea válida, el denominador debe ser diferente de cero, así:

$$x - 2 \neq 0 \ , \ x \neq 2$$

por lo tanto: Dom(f) = R - {2}

Expresión que nos indica que el dominio de la función dada es el conjunto de los números reales excepto el 2.

Para calcular la imagen o recorrido de la función, la expresamos en función de la otra variable (x), es decir, despejamos x.

$$y = \frac{x - 1}{x - 2}$$

$$y(x - 2) = x - 1$$

$$xy - 2y = x - 1$$

$$xy - x = -1 + 2y$$

$$x(y - 1) = 2y - 1$$

$$x = \frac{2y - 1}{y - 1}$$

El denominador de la expresión debe ser diferente de cero, es decir, $y \neq 1$. Por lo tanto, y puede tomar cualquier valor real excepto el 1.

$$Im(f) = R - \{1\} \quad \text{sol.}$$

b) $f(x) = x + 1/x$

Desarrollo:

$$y = x + 1/x$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$x \neq 0$$

Por lo tanto x puede tomar cualquier valor real excepto el cero (0).

$$Dom(f) = R - \{0\} \quad \text{sol.}$$

<u>Determinación del codominio:</u>

Despejamos la variable x.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$xy = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - xy + 1 = 0$$

Hemos obtenido una ecuación de segundo grado, la misma que la resolveremos aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Como la expresión dada está afectada por una raíz par, debe ser mayor o igual que cero.

$$y^2 - 4 \geq 0$$

$$y^2 \geq 4$$

$$/y/ \geq \text{--->} \quad \begin{array}{l} y \geq 2 \\ -y \geq 2 \end{array}$$

$$y \leq -2$$

Por lo tanto: $Im(f) = R - \{-2,2\}$ ó

$2 \leq x \leq -2$ sol.

c) $f(y) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

Desarrollo:

$$y = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

Los únicos valores que no puede tomar x son aquellos para los cuales el denominador $x^2 - 4$ se anula.

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 2$$

$$x^2 \neq \pm 2$$

Por lo tanto: $Dom(f) = R - \{-2,2\}$ sol.

Codominio o Imagen:

$$y = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$y = \frac{(x + 2)}{(x + 2)\ (x - 2)}$$

$$y = \frac{1}{(x - 2)}$$

$xy - 2y = 1$

$xy = 1 + 2y$

$$x = \frac{1 + 2y}{y}$$

$y \neq 0$

Por lo tanto: $Im(f) = R - \{0\}$ sol.

d) $$y = \frac{1}{x(x+3)}$$

Desarrollo:

Dominio:

$$y = \frac{1}{x(x+3)}$$

$x(x+3) \neq 0$

$x \neq 0$

$x + 3 \neq 0$

$x \neq -3$

Por lo tanto $Dom(f) = R - \{0,-3\}$ sol.

Codominio:

$$y = \frac{1}{x^2 + 3x}$$

$x^2y = 3xy - 1$

$x^2y + 3xy - 1 = 0$

$$x=\frac{-3y\pm\sqrt{9y^2-4(y)(-1)}}{2y}$$

$$x=\frac{-3y\pm\sqrt{9y^2+4y}}{2y}$$

$$2y \neq 0$$

$$y \neq 0$$

Analicemos la cantidad subradical con las siguientes posibilidades: $y \geq 0$; $y \leq 0$

$9y^2 + 4y \geq 0$

$y\ (9y + 4) \geq 0$

$y \geq 0$ | $y \leq 0$

$9y + 4 \geq 0$ | $9y + 4 \leq 0$

$9y \geq -4$ | $9y \leq -4$

$y \geq -4/9$ | $y \leq -4/9$

Por lo tanto: $Im(f)=]-\alpha, -4/9]$ U $[0, \alpha[$ ó $0<y\leq-4/9$ sol.

e) $$y = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

Desarrollo:

Dominio:

$$y = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

$$1 - x \neq 0$$

$$x \neq 1$$

Por lo tanto $Dom(f) = R - \{1\}$ sol.

Codominio:

$$y = \frac{x^2 - 1}{1 - x}$$

$$y - xy = x^2 - 1$$

$$x^2 + xy - y - 1 = 0$$

$$x^2 + xy - (y + 1) = 0$$

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4(y+1)}}{2}$$

$$x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4y + 4}}{2}$$

$$y^2 + 4y + 4 \geq 0$$

$$(y + 2)^2 \geq 0$$

Como usted conoce que cualquier cantidad elevada al cuadrado es siempre ≥ 0, entonces (y) puede tomar cualquier valor real.

Por lo tanto: $Im(f) = R$ sol.

f) $$y = \frac{3x}{x^2 + 4}$$

Desarrollo:

Dominio:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 4}$$

$$x^2 + 4 \neq 0$$

Por lo tanto $Dom(f) = R$ sol.

Codominio:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 4}$$

$$x^2y + 4y = 3x$$

$$x^2y + 4y - 3x = 0$$

$$x^2y - 3x + 4y = 0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4(y)(4y)}}{2y}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-16y^2}}{2y}$$

$$2y \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$9 - 16y^2 \geq 0$$

$$-16y^2 \geq -9$$

$$16y^2 \leq 9$$

$$y^2 \leq 9/16$$

$$y \leq 3/4$$

$/y/ \leq 3/4$

$$-y \leq 3/4$$

$$y \geq - 3/4$$

$\text{Im}(f) = [3/4, -3/4]$ ó

$-3/4 \leq y \leq 3/4$ sol.

g) $$y = \frac{1}{2x^2 + 4}$$

Desarrollo:

Dominio:

$$2x^2 + 4 \neq 0$$

Por lo tanto Dom(f) = R sol.

Codominio:

$$y = \frac{1}{2x^2 + 4}$$

$$2x^2y + 4y = 1$$

$$2x^2y = 1 - 4y$$

$$x^2 = \frac{1 - 4y}{2y}$$

$$x = \sqrt{\frac{1-4y}{2y}}$$

$$2y \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$y > 0$	$y < 0$
$1 - 4y \geq 0$	$1 - 4y \leq 0$
$-4y \geq -1$	$-4y \leq -1$
$4y \leq 1$	$y \geq 1/4$
$y \leq 1/4$	

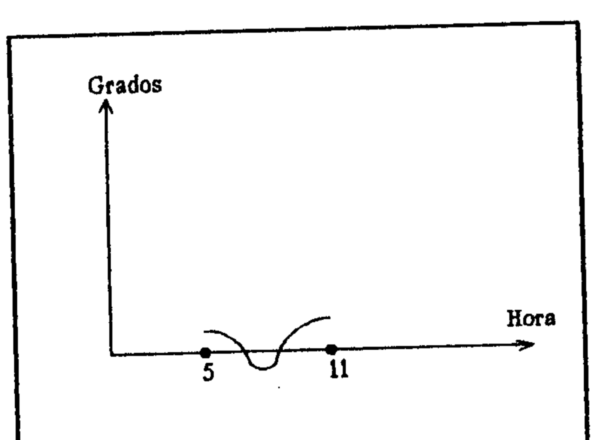
Por lo tanto: $Im(f) =]0,\ 1/4]$ ó $0 < y \leq 1/4$

En los ejercicios desarrollados como en los propuestos, que no se indica el conjunto de definición, usted debe considerar como conjunto de definición a los números reales.

5.3. EXTENSIÓN DE FUNCIONES

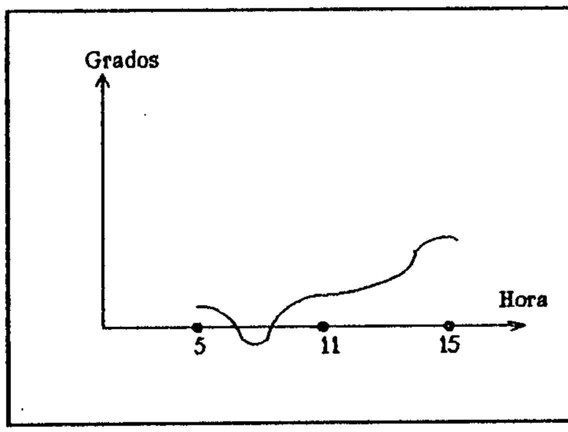
Varsavsky nos dice que, las funciones son relaciones, que se podrán extender y restringir.

Si he tomado la temperatura del día desde las 5 hasta las 11 de la mañana, tengo una función F, cuyo alcance es el tiempo, su rango son los números, y su dominio los instantes entre las cinco y las once de la mañana.



Si sigo registrando la temperatura hasta las 3 de la tarde, tengo otra función G, de igual alcance y rango que F, pero de dominio mayor. Además, F y G coinciden entre las 5 y las 11, o sea en los puntos del dominio de F.

G es entonces una extensión de F. Se dice también que F es una restricción de G.



Extender una función es aumentar puntos a su dominio, sin cambiarla en donde ya estaba definida. Lo que se obtiene es otra función. La función sucesor S: N ---> N se puede extender a No así: a 0 le corresponde 1, y a 1,2,3,..., lo mismo que antes. Obtengo así una función S_o que es extensión de S. Aquí tenemos su tabla:

S_o

0	1
1	2
2	3
.	.
.	.
.	.

Cuando una función está dada por una tabla, es muy fácil extenderla o restringirla: basta agregarle o quitarle filas.

F

a	17
b	b
c	a

F_1

a	17
b	b
c	a
r	b

F_2

a	17
c	a

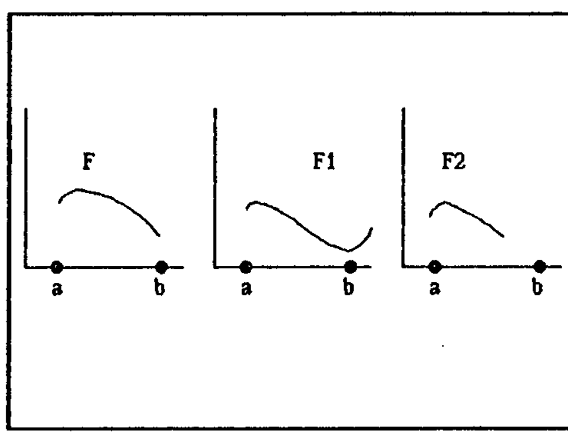
F_3

a	17
b	b
c	a,b
r	b

F_1 es una extensión de F. F_2 es una restricción de F. F_3 es una relación, extensión de F, pero F_3 no es una función pues a c, le corresponde dos valores: a y b.

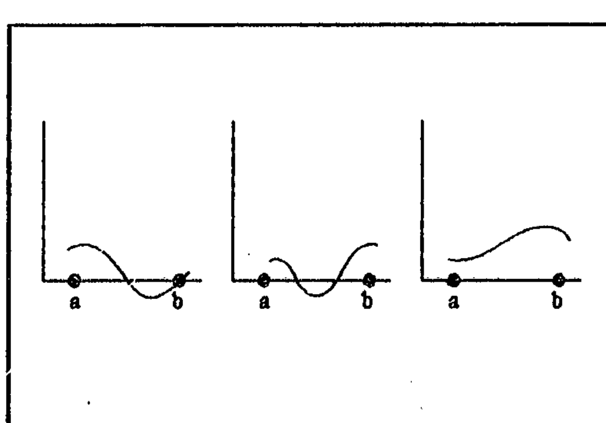
Cuando hablamos de extensión de una función, pensamos en general, en otra función y no en una relación cualquiera.
Cuando una función está dada por un gráfico, también es muy fácil extenderla o restringirla. Para extenderla basta prolongar la curva. Para restringirla basta quitarle puntos.

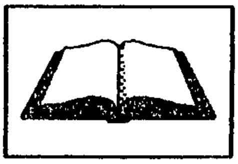
EJERCICIO



F_1 es extensión de F.
F_2 es restricción de F.

Ninguna de las siguientes funciones es extensión de las otras.





ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 5

<u>Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos</u>:

1.- Encuentre el dominio e imagen de las siguientes funciones reales:

a) $h(x) = \dfrac{2x}{4}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

c) $f(x) = 3x^2 + 3$

d) $g(x) = \dfrac{/x/}{x}$

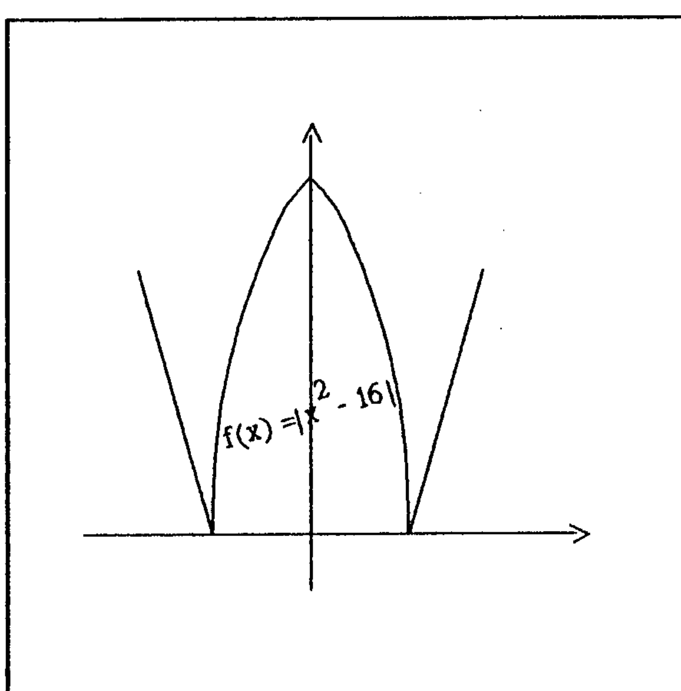
e) $h(x) = \left[\begin{array}{ll} x + /x/, & -5 \leq x < 0 \\ -/x/ , & 0 \leq x < 3 \\ /x/-2 , & 3 < x \leq 5 \end{array} \right.$

f) $g(x) = \left[\begin{array}{ll} 2x , & x \geq 0 \\ -1 , & x < 0 \end{array} \right.$

g) $g(x) = \left[\begin{array}{ll} -1 , & \text{si } x \in \,]-\alpha, 1] \\ /x/ , & \text{si } x \in \,]1, 4] \\ 5 , & \text{si } x \in [4, \alpha[\end{array} \right.$

h) $h(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

UNIDAD 6: FORMAS DE REPRESENTAR FUNCIONES	6.1. Funciones por descripciones comunes. 6.2. Funciones dadas por tablas. 6.3. Funciones dadas por fórmulas. 6.4. Funciones dadas por gráficos.



OBJETIVO 06	Representar una función en sus diferentes formas.

DE QUE MANERA SU PUEDEN DEFINIR FUNCIONES?

A las funciones las podemos definir de las siguientes formas:

a) Por descripciones comunes
b) Mediante tablas
c) Por medio de fórmulas
d) Por representación gráfica

6.1. POR DESCRIPCIONES COMUNES

A las relaciones como a las funciones se las puede expresar por medio de palabras, es decir, por descripciones comunes, así por ejemplo:

- Si se tiene un conjunto de personas y a cada uno se les hace corresponder su número de cédula, se tiene una función.

- Al considerar el conjunto de vehículos que posee una institución y el número de matrícula, esto es una función.

- En un almacen en donde existe una agrupación entre los productos y sus precios. Cada producto tiene un precio y sólo uno, esto es una función.

- Si consideramos un conjunto de números telefónicos y los colegios de la ciudad de Loja, puede ocurrir que dos o más números telefónicos le correspondan al mismo colegio, esto es una función.

- A todo libro escrito por un solo autor, asignarle el nombre del autor.
- A cada centro educativo le corresponde su partida presupuestaria.
- A cada provincia ecuatoriana le corresponde su Alcalde.
- A cada ser humano le corresponde su número de años.
- A cada establecimiento educativo le corresponde su Rector.

Todas las asociaciones o correspondencias de los ejemplos anteriores, los podemos escribir por pares ordenados.

Así en el primer ejemplo se hace corresponder:

(personas, número de cédula)
(Sonia, 11-00249380)
(Alba, 11-00413705)

6.2. MEDIANTE TABLAS

A los pares ordenados que son elementos de una función se los puede escribir en tablas de dos columnas, de modo que en la primera columna se ubique los elementos del dominio y en la segunda los elementos del codominio. Este es un método muy conveniente, pero es necesario hacer ciertas limitaciones.

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Analicemos las siguientes correspondencias:

1.-

x = provincias	y = "capitales"
Loja	Loja
Esmeraldas	Esmeraldas
Guayas	Guayaquil
Azuay	Cuenca
Chimborazo	Riobamba

2.-

$x = Z$	$y = x^2$
- 1	1
1	1
2	4
- 2	4
3	9
- 3	9

El ejemplo es una parte de la tabla porque el conjunto de números enteros es infinito, por lo tanto sus cuadrados también son infinitos.

3.-

x = Directores de Area	y = Departamentos
Henry	Físico-matemáticas
Walter	Lengua y literatura
Yolanda	Inglés
Kléver	Química y Biología
Beatríz	Administración
Felix	Filosófico-Sociales

4.-

x = Asignatura	y = Profesor
Algebra I	Jorge J.
Estadística Descriptiva	Jorge B.
Algebra II	Luis E.
Geometría Analítica	Germán G.
Mecánica I	Manuel C.
Estructura Algebráica	Vicente M.
Cálculo I	Luis M.
Dibujo Técnico	José S.
Movimiento Ondulatorio	Gonzalo M.

5.-

$x = R$	$y = \dfrac{x^2 + 1}{2}$
- 3	5
- 2	5/2
- 1	1
0	1/2
1	1
2	5/2.
3	5
1/2	5/8
1/3	10/18
$\sqrt{2}$	3/2
$\sqrt{7}$	4

6.-

$x = R$	$y = \sqrt{x}$
-3	$-1{,}44$
-2	$-1{,}26$
-1	-1
0	0
5	1,71
14	2,41
32	3,17
0,5	0,79
0,82	0,94
$\sqrt{17}$	1,60

6.3. POR FÓRMULAS

Una de las formas que más se utiliza en matemáticas para definir funciones es por fórmulas.

EJEMPLO: Consideremos como el dominio de una función a los números dígitos y a cada uno hacerle corresponder su triplo menos 2.

Lo expresado en lenguaje común es más cómodo escribirlo en fórmula, así:

$$f(x) = 3x - 2$$

- La fórmula para calcular el espacio recorrido por un móvil es igual a la velocidad que se imprime al móvil por el tiempo empleado. Lo expresamos así:

$$e = v.t$$

Esta fórmula define una función: y es el espacio y v.t es x.

- La fórmula que relaciona el perímetro de un exágono con el lado es:

$$P = 6l$$

$$y = 6x$$

Esta fórmula define una función: y es el perímetro y x la longitud del lado.

- La fórmula que relaciona el área del círculo en función del radio es:

$$A = \pi r^2$$

$$y = \pi x^2$$

- La fórmula que relaciona el doble de un número elevado al cuadrado más el triple del mismo número disminuído en 15 es:

$$y = 2x^2 + 3x - 15$$

Como usted podrá darse cuenta se pueden inventar infinitas fórmulas que definan funciones.

Según Varsavsky la variable que representa un punto cualquiera del dominio se llama variable independiente; la que representa un valor cualquiera de la función, variable dependiente. Se llama así porque el valor de la función depende del punto del dominio: uno siempre elige un punto del dominio como quiera y entonces queda fijado el valor de la función.

6.4. POR REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La representación gráfica de las funciones son métodos matemáticos que se emplean con frecuencia con el fin de observar de manera directa si ésta se mantiene constante, aumenta, disminuye, etc.

Para la representación gráfica de una función procedemos de la siguiente manera: sobre el eje de las equis se escribe cada uno de los números del dominio o alcance y sobre el eje de las y, los elementos que corresponden al codominio o rango.

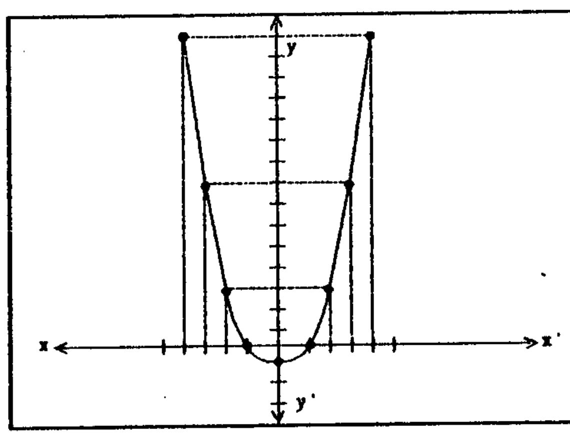
Por cada par de elementos se trazan las respectivas perpendiculares a los ejes y sus intersecciones son puntos del gráfico. El conjunto de todos estos puntos forman la gráfica de la función dada.

EJEMPLO: Para la función $y = x^2 - 1$, su gráfico es:

Una manera de empezar a construir la gráfica sería la siguiente:

- Se calculan algunos puntos mediante la elaboración de una tabla de valores así:

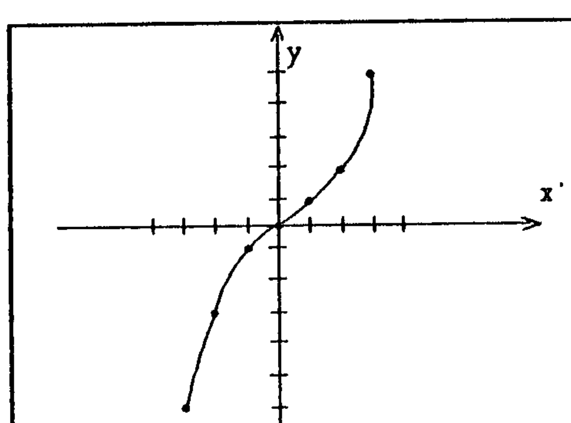
x	f(x)
1	0
2	3
3	8
4	15
0	- 1
- 1	0
- 2	3
- 3	8
- 4	15
:	:



EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Representar gráficamente la función dada por pares ordenados.

$f(x)=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,5),(-1,-1),(-2,-3),(-3,-6)\}$

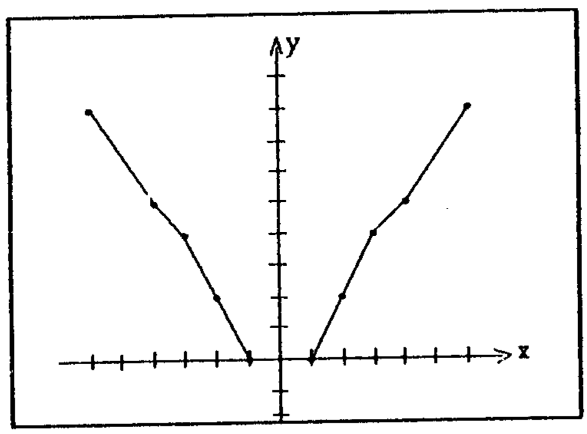


La gráfica que hemos trazado está definida en el conjunto de los números enteros. Si tomamos para su definición al conjunto de los números reales, los puntos que se obtienen son más próximos, entonces el trazo de la gráfica tiene mayor precisión.

2.- Representemos gráficamente la función:

$$h(x) = 4/3 \sqrt{x^2 - 1}$$

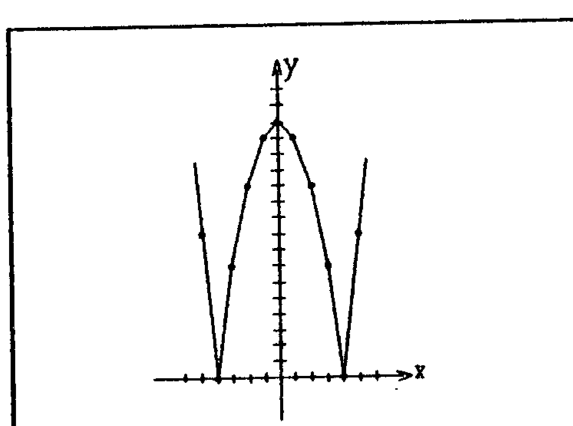
x	1	2	3	4	6	-1	-2	-3	-4	-6
f(x)	0	2,3	3,8	5,2	7,9	0	2,3	3,8	5,2	7,9



3.- Representemos gráficamente la función:

$h(x) = /x^2 - 16/$

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	-5	5
f(x)	16	15	12	7	0	15	12	7	0	9	9



4.- Trazar la gráfica de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1/2\ x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Desarrollo:

Elaboramos una tabla de valores para cada fórmula de la función, así:

f(x) = {1/2 x si x < 1}

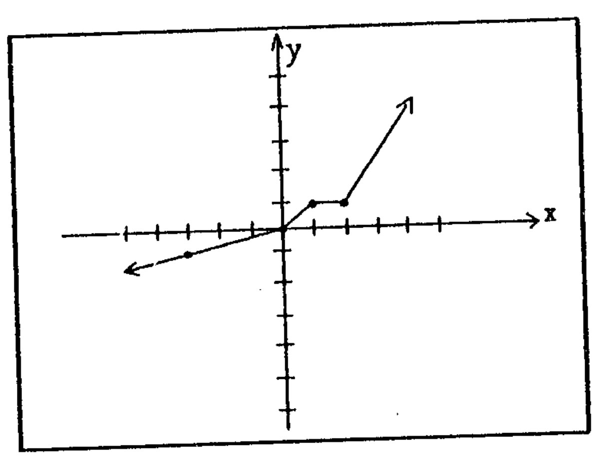
x	0	-1	-2	-3
f(x)	0	-1/2	-1	-3/2

f(x) = {1 si 1 ≤ x < 2}

x	1	2
f(x)	1	2

f(x) = {x-1 si x ≥ 2}

x	2	3	4
f(x)	1	2	3

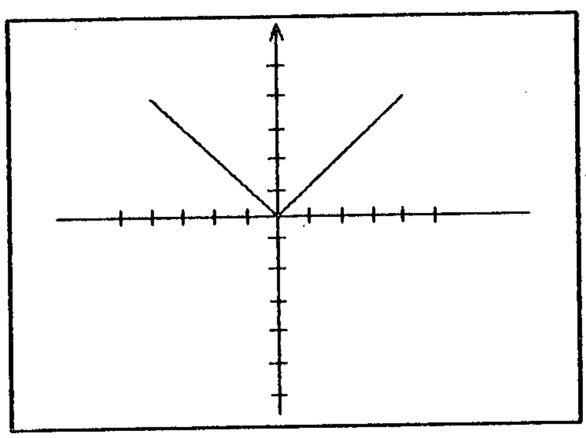


Para trazar la gráfica de una función definida por partes, se desarrolla por separado cada parte del dominio en que la función se define de una manera, se traza la gráfica en esa región y luego se unen todos las gráficas obtenidas.

Para indicar que un punto no pertenece a la gráfica se lo encierra en un círculo (o)

b) $f(x) \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

x	f(x)
0	0
1	1
2	2
3	3
- 1	1
- 2	2
- 3	3



c) $f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 2 \\ x, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

Desarrollo:

$f(x) = \{2, -2 \leq x < -1\}$

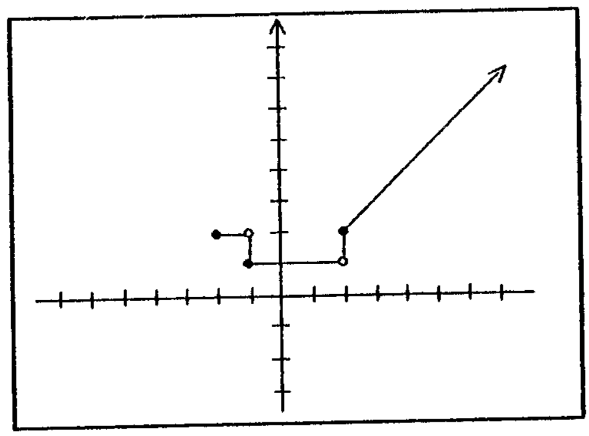
x	-2	-1
f(x)	2	2

$f(x) = \{1, -1 \leq x < 2\}$

x	-1	0	1	2
f(x)	1	1	1	1

$f(x) = \{x, 2 \leq x \leq 5\}$

x	2	3	4	5
f(x)	2	3	4	5



d) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x < 7 \end{cases}$

Desarrollo:

$g(x) = \{x^2 - 1 \quad \text{si } x < 0\}$

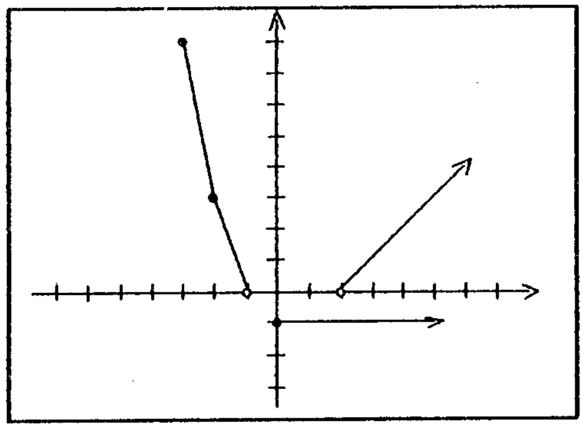
x	-1	-2	-3
f(x)	0	3	8

$g(x) = \{-1 \text{ si } 0 \leq x \leq 2\}$

x	0	1	2
f(x)	-1	-1	-1

$g(x) = \{x - 2 \quad \text{si } 2 < x < 7\}$

x	2	3	4	5	6
f(x)	0	1	2	3	4



e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ x, & \text{si } -1 < x < 1 \\ -1, & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

Desarrollo:

$f(x) = \{1, \text{ si } x \geq 0\}$

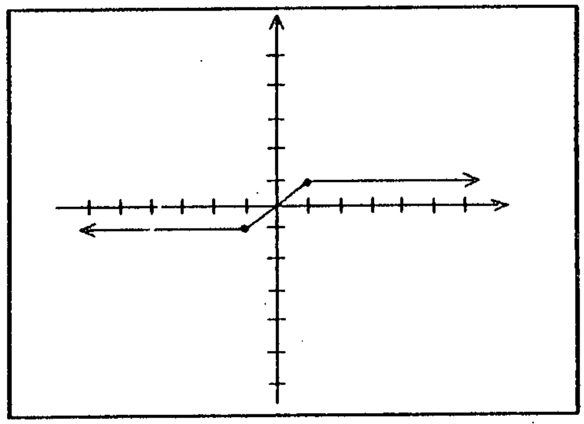
x	1	2	3	4
f(x)	1	1	1	1

$f(x) = \{x, \text{ si } -1 < x < 1\}$

x	-1	0	1
f(x)	-1	0	1

$f(x) = \{x, \text{ si } -1 < x < 1\}$

x	-1	-2	-3	-4
f(x)	-1	-1	-1	-1

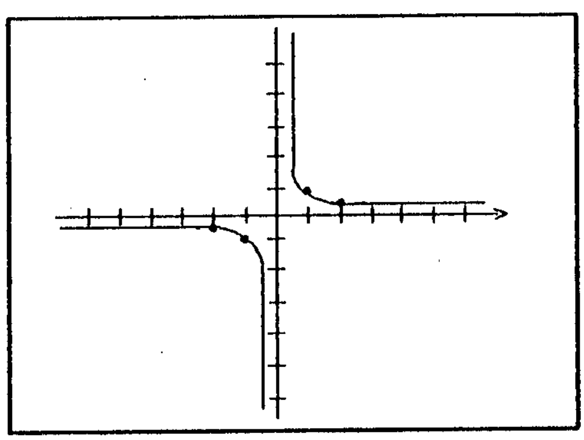


5.- Representar gráficamente la siguiente función:

$f(x) = 1/x$

$y = 1/x$

x	1	2	3	4	-1	-2	-3	0,5	1/3	1/4
f(x)	1	0,5	1/3	1/4	-1	-0,5	-1/3	2	3	4

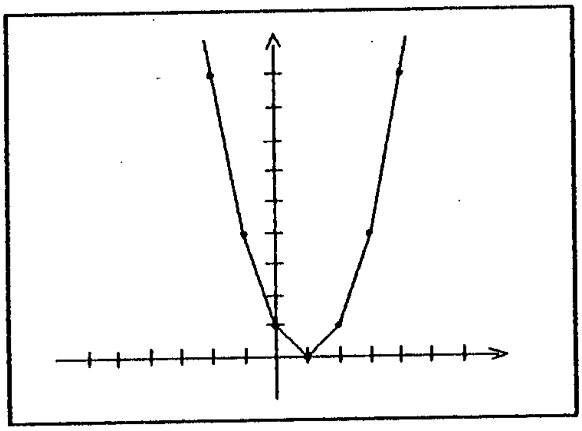


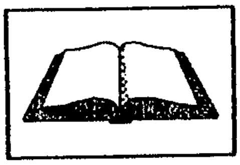
6.- Represente gráficamente la siguiente función:

$h(x) = x^2 - 2x + 1$

$y = x^2 - 2x + 1$

x	f(x)
0	1
1	0
2	1
3	4
4	9
- 1	4
- 2	9





ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 6

<u>Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos</u>:

1.- Escriba cinco ejemplos de funciones expresadas por descripciones comunes.

2.- Construya una tabla cuyo dominio sea el nombre de los miembros de su familia con su respectiva edad (en años).

3.- Construya una tabla con el nombre de 10 de sus compañeros y el respectivo número de cédula.

4.- Elabore dos tablas cuyo dominio y codominio queda a su elección.

5.- Escriba la fórmula que corresponde a los siguientes enunciados:

a) La mitad de un número aumentado en 3.

b) La velocidad final es igual a la velocidad inicial aumentada en la gravedad, multiplicada por el tiempo al cuadrado.

c) El doble de un número natural más su siguiente.

6.- Represente gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x + 3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

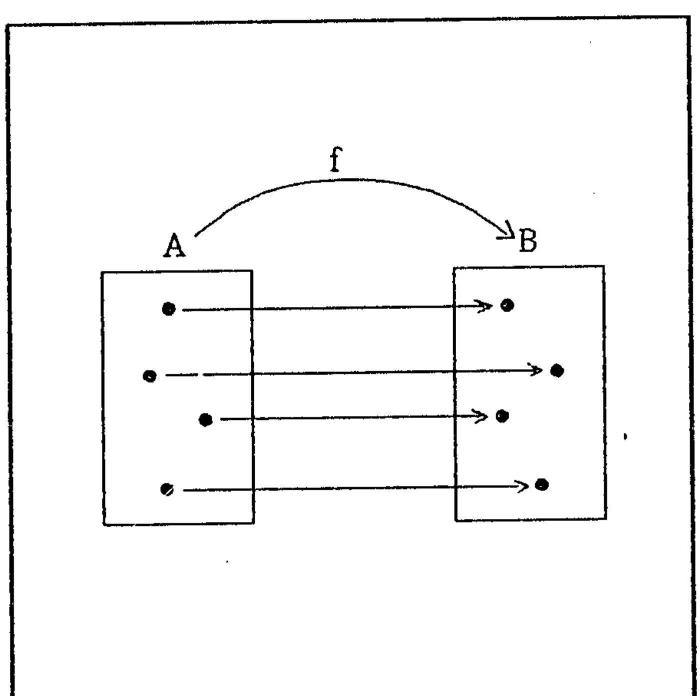
c)

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x \le -2 \\ x/2 + 7/4 & \text{si } -2 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -2 \\ (x+1) & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ -x+4 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

UNIDAD 7: CLASE DE FUNCIONES	7.1. Función Inyectiva 7.2. Función Sobreyectiva 7.3. Función Biyectiva 7.4. Función Inversa, propiedades y cálculo



OBJETIVO 07	Diferenciar una función de otra y determinar su inversa

CLASE DE FUNCIONES

A las funciones las podemos clasificar de la siguiente manera:

1.- Inyectivas, Uno a Uno ó Inyectivas.

2.- Sobreyectiva, sobre, Subyectiva o Suprayectiva.

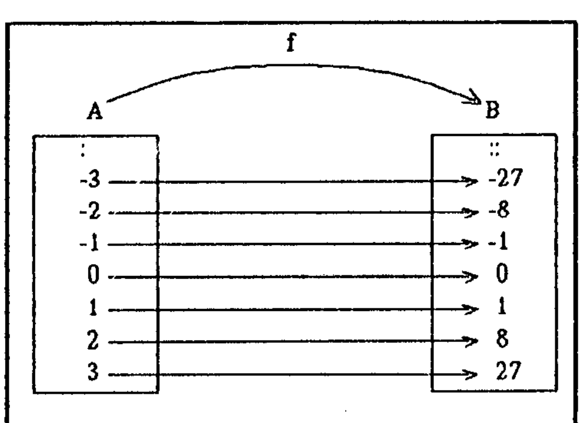
3.- Biyectivas.

4.- Inversa.- Propiedades.

7.1. FUNCION INYECTIVA

EJEMPLO: Considerando la función f "a cada número entero hacerle corresponder su cubo".

Luego, representémosla por las diferentes formas o métodos.

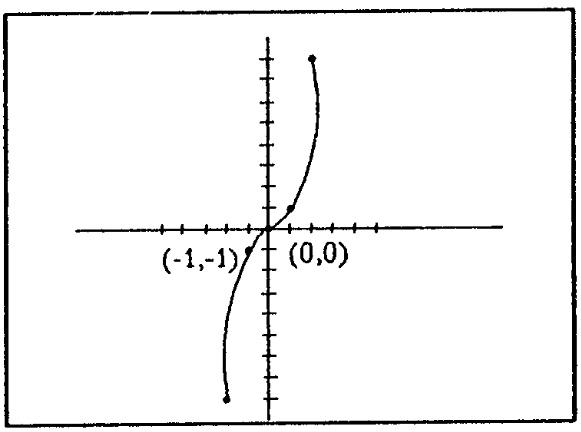


b) $f:A \dashrightarrow B=\{(-3,-27),(-2,8),(1,1),(0,0),(1,1),(2,8),(3,27)\}$

c) $f(x) = x^3$ o $y = x^3$

d)

x	f(x)
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27



Como observamos en las diferentes formas de representar una función que a cada elemento del dominio le corresponde un solo elemento en el codominio. En el gráfico o grafo las componentes de los pares ordenados son diferentes y en el gráfico vemos que a cada par ordenado le corresponde un punto en el plano cartesiano y solo uno.

POR LO TANTO:

Una función f: A ---> B es inyectiva si y solo si cumple con la siguiente propiedad:

Que a elementos distintos de A le corresponden imagenes diferentes en B, es decir.

Si $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ es equivalente a:

$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

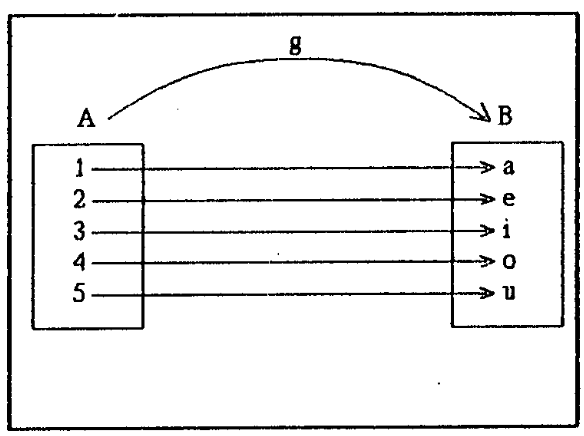
Dadas las siguientes funciones, identifique cuáles son inyectivas:

1.- f: A ---> B = {(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)}

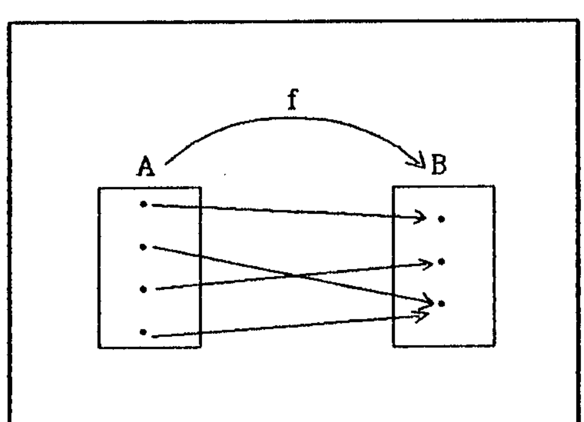
2.- f: C ---> D = {(1,3),(2,6),(6,2),(3,1),(4,2)}

3.- f(x) = x^2 definida en los N.

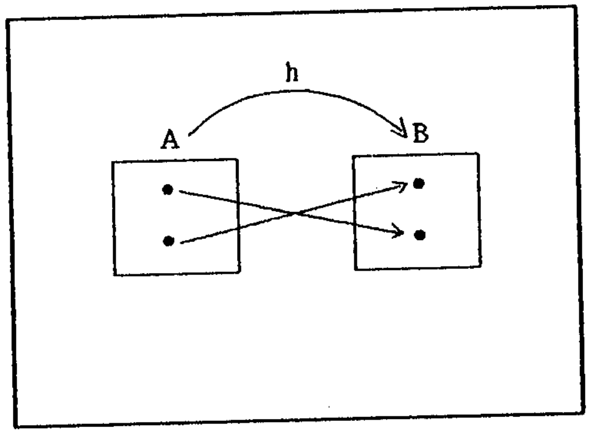
4.-



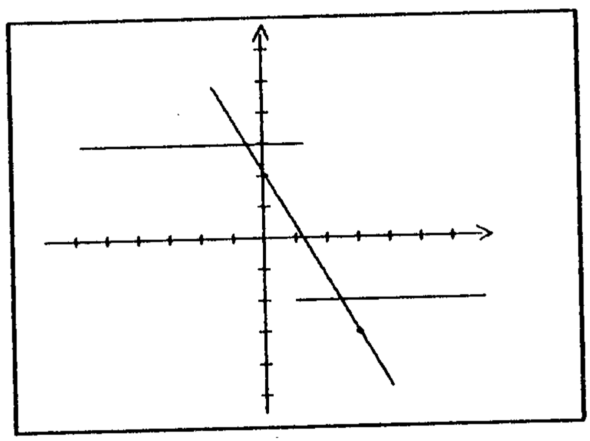
5.-



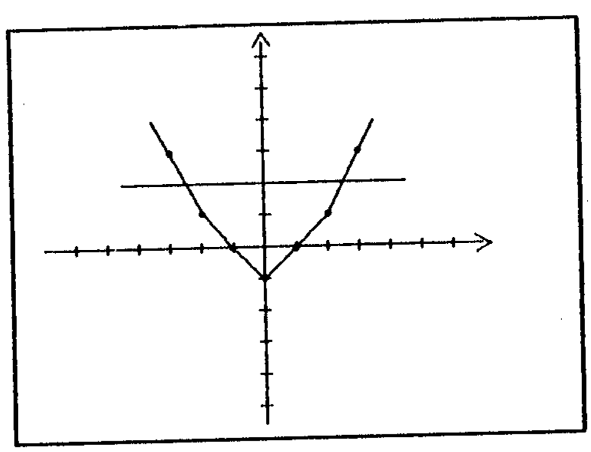
6.-



7.-



8.-



9.- "siguiente de" definida en los Z

10.- "a cada persona asignarle su número de años"

SOLUCION

1.- f: A ---> B Si es inyectiva porque los elementos de los pares ordenados son diferentes.

2.- f: C ---> D No es inyectiva porque dos pares ordenados tienen la misma imagen.

3.- Si es inyectiva porque a cada número natural le corresponde un sólo número que es su cuadrado.

4.- Si es inyectiva porque cada elemento del dominio tiene una sola imagen en el codominio.

5.- f no es inyectiva.

6.- g si es inyectiva.

7.- NOTA.- Si una función está definida en forma gráfica, se reconoce que es inyectiva trazando paralelas al eje x, si éstas cortan a la gráfica en un solo punto, entonces se trata de una función inyectiva.

Por lo tanto el ejemplo 7 corresponde a una función inyectiva.

8.- No es inyectiva, porque si trazamos paralelas al eje x éstas cortan a la gráfica de la función en dos puntos.

9.- Si es inyectiva.

10.- No es inyectiva porque dos o más personas pueden tener el mismo número de años.

Demuestre que las siguientes funciones son inyectivas (Todas las funciones están definidas de R ---> R)

1.- $f(x) = 1 - 2/x^2$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

SOLUCION

Para que una función sea inyectiva debe cumplirse que:

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

Para mayor comprensión en la demostración de los ejercicios dados reemplazamos:

$a = x_1$

$b = x_2$ entonces tenemos:

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1^2 - 2}{x_1^2} = \frac{x_2^2 - 2}{x_2^2}$$

$$x_2^2 \cdot x_1^2 - 2x_2^2 = x_2^2 \cdot x_1^2 - 2x_1^2$$

$$-2x_2^2 = -2x_1^2$$

$$\boxed{x_1^2 = x_2^2} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Por lo tanto $f(x) = 1 - 2/x^2$ es inyectiva

2.- $h(x) = 2x + 1$

SOLUCION:

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$\boxed{x_1 = x_2} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Por lo tanto $f(x) = 2x + 1$ es inyectiva

3.- $g(x) = \sqrt{x}$

SOLUCION:

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$$

$$(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2$$

$$\boxed{x_1 = x_2} \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Por lo tanto $g(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva

4.- $f(x) = \dfrac{x}{x - 5}$

SOLUCION:

$$\frac{x_1}{x_1 - 5} = \frac{x_2}{x_2 - 5}$$

$$x_1 x_2 - 5x_1 = x_1 x_2 - 5x_2$$

$$-5x_1 = -5x_2$$

$$\boxed{x_1 = x_2} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Por lo tanto $f(x) = x/x-5$ es inyectiva

5.- $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

SOLUCION:

$$\frac{x_1 + 2}{x_1^2 - 4} = \frac{x_2 + 2}{x_2^2 - 4}$$

$$\frac{(x_1 + 2)}{(x_1 + 2)(x_1 - 2)} = \frac{(x_2 + 2)}{(x_2 + 2)(x_2 - 2)}$$

$$\frac{1}{(x_1 - 2)} = \frac{1}{(x_2 - 2)}$$

$$x_1 - 2 = x_2 - 2$$

$$\boxed{x_1 = x_2} \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

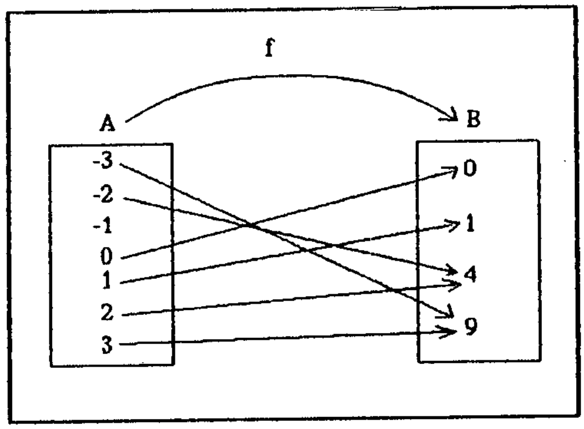
Por lo tanto $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ es inyectiva

7.2. FUNCIONES SOBREYECTIVAS

EJEMPLO: Consideremos la función f "a cada número entero hacerle corresponder su cuadrado".

Luego: representemos la función dada por las diferentes formas o métodos.

a)



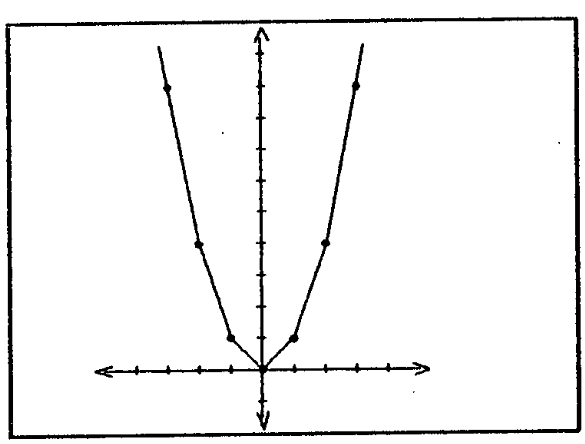
b) f:A --> B={(-1,1),(1,1),(-2,4),(2,4),(-3,9),(3,9),(0,0)}

c) $f(x) = x^2$ o $y = x^2$

d)

x	fx)
1	1
-1	1
-2	4
2	4
-3	9
3	9
0	0

e)



Como observamos en las diferentes formas de representar una función que cada elemento del codominio es imagen de por lo menos un elemento del dominio. En el grafo hay pares que tienen la misma segunda componente y en el gráfico vemos también que algunos puntos tienen la misma ordenada.

POR LO TANTO:

Una función f: A ---> B es sobreyectiva si y solo si cumple con la siguiente propiedad:

Que todos los elementos del codominio son imagen de por lo menos un elemento del dominio, es decir:

$b \in B \Rightarrow a \in A$ tal que $f(a) = b$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Dadas las siguientes funciones. Identifique cuáles son sobreyectivas.

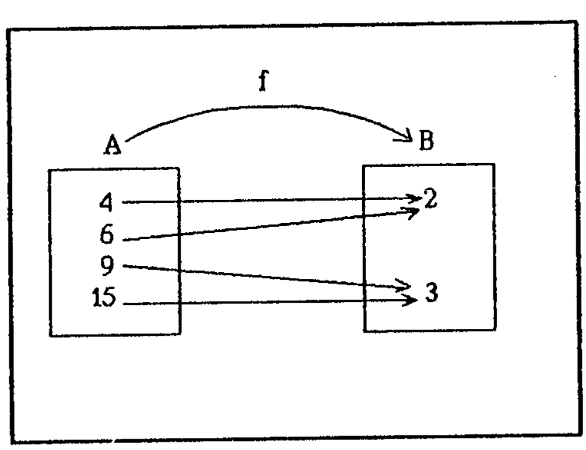
1.- f: A ---> B = {(6,2),(9,3),(3,1),(12,4),(16,4)}

2.- f: C ---> D = {(1,4),(2,8),(3,12),(4,16)}

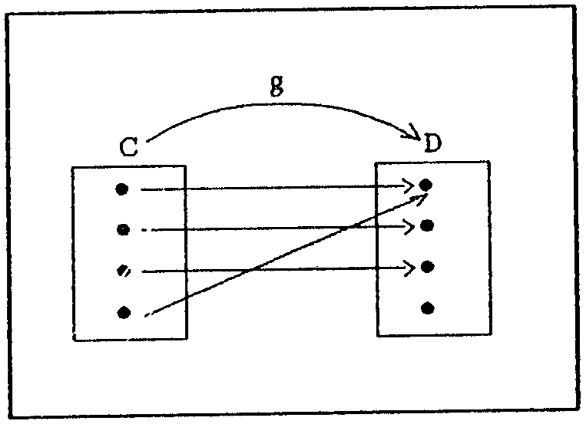
3.- h(x) = 2x - 7 definida de Z ---> Z

4.- g(x) = x + 3 de N ---> N

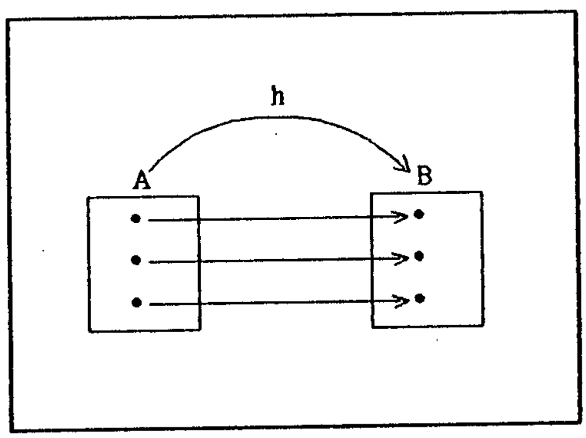
5.-



6.-

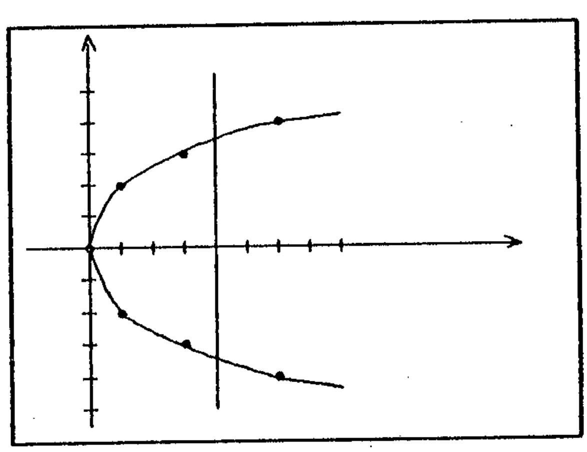


7.-

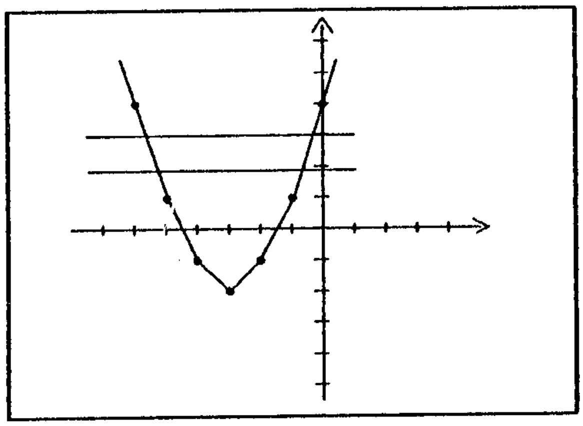


8.- "a cada número racional hacerle corresponder su cuadrado"

9.-



10.-



SOLUCION:

1.- f: A ---> B Si es sobreyectiva porque existen pares ordenados que tienen la misma segunda componente.

2.- f: C ---> D Si es sobreyectiva

3.- h(x) Si es sobreyectiva

4.- g(x) No es sobreyectiva porque los elementos 1,2,3 no son imagen de ningún elemento del codominio.

5.- f si es sobreyectiva.

6.- g no es sobreyectiva, porque existe un elemento en el codominio que no es imagen de algún elemento del dominio.

9.- No es función porque al trazar las paralelas al eje y estas cortan en más de un punto.

10.- NOTA.- Si una función está definida en forma gráfica, se reconoce que es sobreyectiva si las rectas horizontales que pasan por el eje y cortan por lo menos en un punto la gráfica de la función.

Por lo tanto el ejemplo 10 corresponde a una función sobreyectiva.

Demuestre que las siguientes funciones son sobreyectivas. (Todas las funciones están definidas de R ---> R)

1.- $f(x) = -x^2 + 2$

SOLUCION

Para que una función sea sobreyectiva debe cumplirse que:

$$\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A\ /\ f(a) = b$$

Para realizar la demostración de los ejercicios dados, substituiremos:

$a = x$

$b = y$ entonces tenemos:

$$y \in B\ \exists\, x \in A/\quad f(x) = y$$

Para conocer si una función f: A ---> B se sobreyectiva, se procede de la siguiente manera:

Se toma yo un elemento cualquiera de los reales, conjunto B.

Aplicando la defininción de función se halla un xo también elementos de los reales, conjunto A tal que (xoyo) $\in$ f.

Esto demuestra que B $\subseteq$ de imagen de f, puesto que y es arbitrario. Pero como sabemos que imagen de f $\subseteq$ B entonces el recorrido de f es igual al conjunto B.

$$y = -x^2 + 2$$

$$yo = -x^2 + 2$$

$$xo^2 = yo + 2$$

$$f(xo) = yo$$

$$f(xo) = -xo^2 + 2$$

$$f(xo) = (yo - 2) + 2$$

$$f(xo) = yo - 2 + 2$$

$$f(xo) = yo \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Por lo tanto $-x^2 + 2$ es sobreyectiva.

2.- $f(x) = 2x$

SOLUCION:

$y = 2x$

$yo = 2xo$

$yo/2 = xo$

$xo = yo/2$

$f(xo) = yo$

$f(xo) = 2xo$

$f(xo) = 2(yo/2)$

$f(xo) = yo$

$f(x) = 2x$ es sobreyectiva.

3.- $g(x) = 6x + 3$

SOLUCION:

$y = 6x + 3$

$yo = 6xo + 3$

$6xo = yo - 3$

$xo = yo - 3/6$

$f(xo) = yo$

$f(xo) = 6xo + 3$

$f(xo) = 6(yo - 3)/6 + 3$

$f(xo) = yo - 3 + 3$

$f(xo) = yo$ L.Q.Q.D

$g(x) = 6x + 3$ es sobreyectiva

4.- $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

SOLUCION:

$$y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$yo = \frac{1}{xo^2 - 4}$$

$$xo^2 - 4yo = 1$$

$$xo^2 = \frac{1 + 4yo}{yo}$$

$$f(xo) = yo$$

$$f(xo) = \frac{1}{xo^2 - 4}$$

$$f(xo) = \frac{1}{\dfrac{1 + 4yo}{yo} - 4}$$

$$f(xo) = \frac{1}{\dfrac{1 + 4yo - 4yo}{yo}}$$

$$f(xo) = \frac{yo}{1 + 4yo - 4yo}$$

$f(xo) = yo$ L.Q.Q.D.

$g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ es sobreyectiva

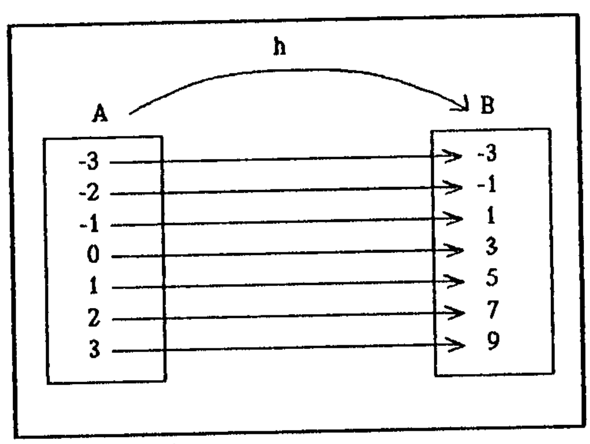
7.3. FUNCIONES BIYECTIVAS

EJEMPLO:

Consideremos la función h "al doble de cada número entero sumarle 3"

Representemos la función propuesta por las diferentes formas o métodos.

a)



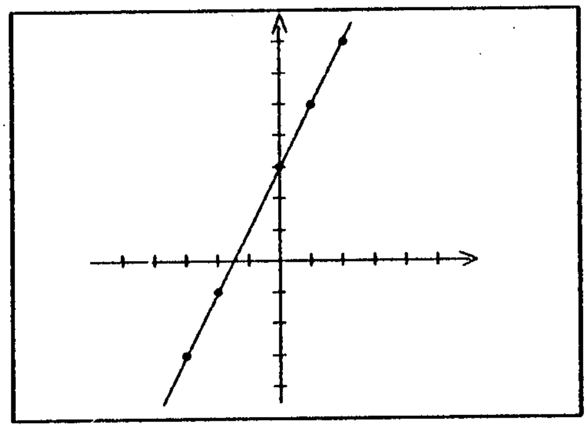
b) f:A --> B={(-3,-3),(-2,-1),(-1,1),(0,3),(1,5),(2,7),(3,9)}

c)

x	fx)
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
-1	5
2	7
3	9

d) $f(x) = 2x + 3$ o $y = 2x + 3$

e)



Como observamos en las diferentes formas de representar una función que cada elemento del dominio tiene imagen diferente en el codominio y que todos los elementos del codominio son imagenes de por lo menos un elemento del dominio. En el gráfico vemos que a cada par ordenado le corresponde un punto en el plano cartesiano y solo uno

POR LO TANTO:

Una función f: A ---> B es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

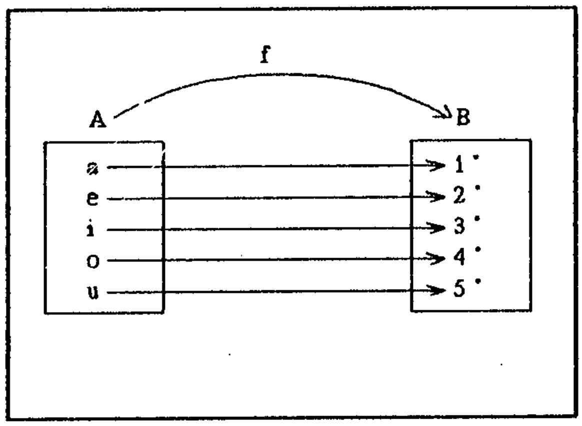
Dadas las siguientes funciones. Identifique cuáles son biyectivas.

1.- f: A ---> B = {(2,1),(3,2),(4,3),(-1,-2),(0,-1),(-2,-3)}

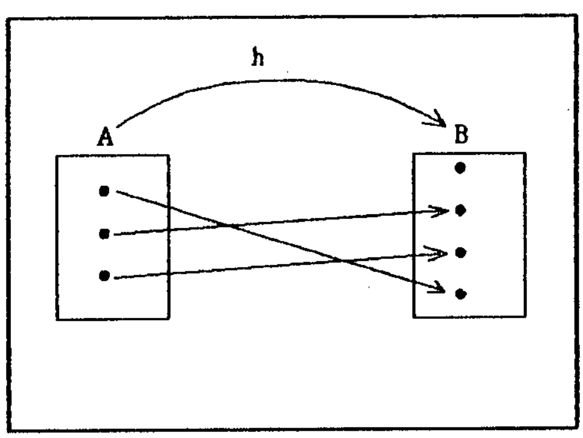
2.- f: C ---> D = {(2,4),(3,6),(6,3),(9,3),(4,8)}

3.- f(x) = x ó y = x

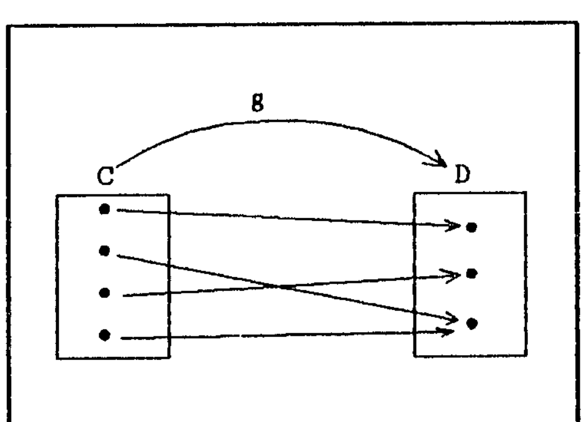
4.-



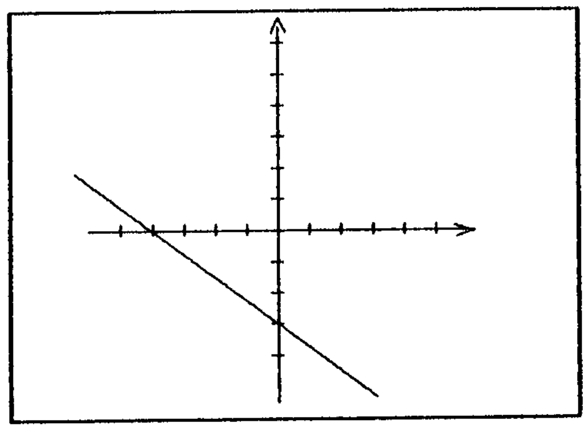
5.-



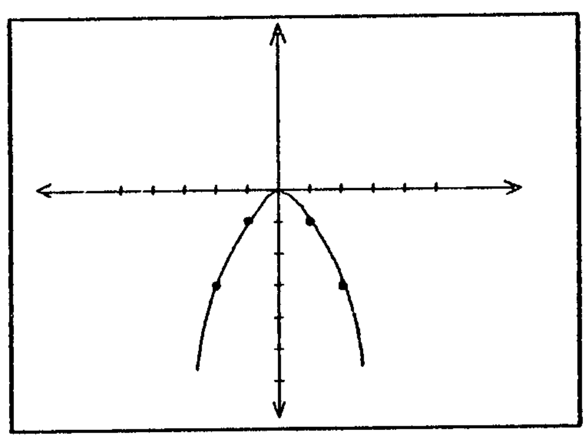
6.-



7.-



8.-



9.- $f(x) = 2x + 4$

10.- $h(x) = \dfrac{x}{x - 5}$

DESARROLLO:

1.- f: A ---> B Si es biyectiva

2.- f: C ---> D No es biyectiva porque cumple con una sola propiedad; es sobreyectiva.

3.- f(x) = x Si es biyectiva.

4.- f: A ---> B Si es biyectiva.

5.- h: A ---> B No es biyectiva, es unicamente sobreyectiva.

6.- g: C ---> D No es biyectiva, es solamente sobreyectiva.

7.- Si es biyectiva

8.- No es biyectiva; es solamente sobreyectiva

9.- Cuando las funciones están definidas mediante fórmula, es necesario comprobar si es Inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo; comprobación que la podemos hacer realizando su gráfico o verificando las propiedades.

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_o) = y_o$

Es inyectiva si:

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$f(x) = 2x + 4$

$2x_1 + 4 = 2x_2 + 4$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$ L.Q.Q.D.

Es sobreyectiva si:

$f(x_o) = y_o$

$f(x) = 2x + 4$

$y_o = 2x_o + 4$ 1

$2x_o = y_o - 4$

$x_o = \dfrac{y_o - 4}{2}$ 2

$f(x_o) = y_o$ 3 reemplazando 1 en 3

$f(x_o) = 2x_o + 4$ 4 reemplazando 2 en 4

$f(x_o) = 2(y_o - 4)/2 + 4$ simplificando

$f(x_o) = y_o - 4 + 4$

$f(x_o) = y_o$ L.Q.Q.D.

Por lo tanto la función $f(x) = 2x + 4$ es biyectiva

10.- $f(x) = \dfrac{x}{x - 5}$

Desarrollo:

Anteriormente se demostró que la función dada es Inyectiva.

Es sobreyectiva si:

$$f(xo) = yo$$

$$f(x) = \frac{x}{x - 5}$$

$$yo = \frac{xo}{xo - 5}$$

$$yoxo - 5yo = xo$$

$$yoxo - xo = 5yo$$

$$xo(yo - 1) = 5yo$$

$$xo = \frac{5y}{yo - 1}$$

$$f(xo) = yo$$

$$f(xo) = \frac{xo}{xo - 5}$$

$$f(xo) = \frac{\dfrac{5yo}{yo - 1}}{\dfrac{5yo}{yo - 1} - 5} = \frac{\dfrac{5yo}{yo - 1}}{\dfrac{5yo - 5yo + 5}{yo - 1}}$$

$$f(xo) = \frac{5yo}{5}$$

$f(xo) = yo$ L.Q.Q.D.

Por lo tanto la función $f(x) = x/x-5$ es biyectiva.

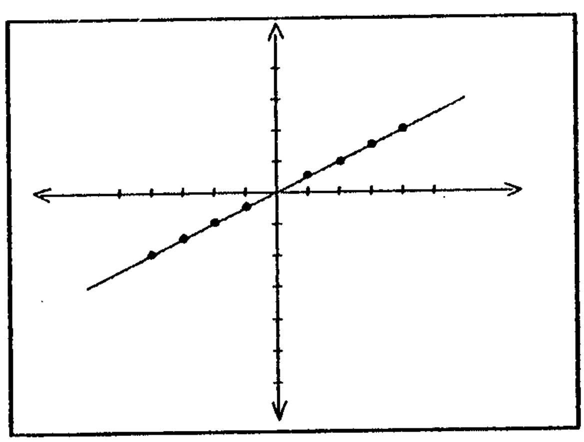
Demuestre que las siguientes funciones son biyectivas.

1.- $h(x) = x/2$

Desarrollo:

Realicemos el gráfico de h.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-3/2	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2



Del gráfico se ve que:

a) Dom(f) = R

b) Im(f) = R

Los dos conjuntos son iguales

Por lo tanto la función $f(x) = x/2$ es biyectiva.

También podemos decir que es biyectiva demostrando que cumple con las propiedades.

Es inyectiva si:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x) = x/2$

$x_1/2 = x_2/2$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$

Es sobreyectiva si:

$f(x_o) = y_o$

$f(x) = x/2$

$y_o = x_o/2$

$x_o = 2y_o$

$f(x_o) = y_o$

$f(x_o) = x_o/2$

$f(x_o) = 2y_o/2$

$f(x_o) = y_o$

Por lo tanto la función $f(x) = x/2$ es biyectiva.

2.- PROAÑO, Ramiro, 1982.

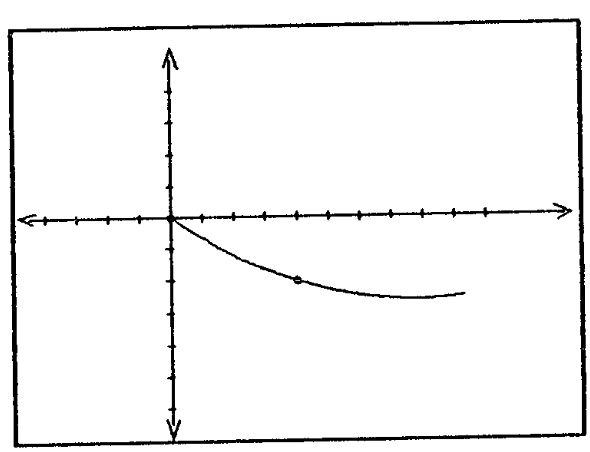
La función $g: R^+ \cup \{0\} \longrightarrow R = \{(x,y)/y = -\sqrt{x}\}$. no es biyectiva, pero podemos transformarla de la siguiente manera:

DESARROLLO:

Para que g sea biyectiva, debe ser sobreyectiva, por lo que es necesario modificar el conjunto de llegada (R).

Del siguiente gráfico, se puede determinar que:

x	y
4	-2
2	-1,4
1	-1
0	0



conjunto recorrido = $R^+ \cup \{0\}$

Para que sea sobreyectiva es necesario que:

conjunto de llegada (R) = conjunto recorrido *
por lo que el conjunto de llegada debe ser $R^- \cup \{0\}$

$g: R^+ \cup \{0\} \text{--->} R^+ \cup \{0\} = \{(x,y)/y = -\sqrt{x}\}$ *

Esta función g ya es sobreyectiva, y como también es inyectiva, se concluye que:

$g: R^+ \cup \{0\} \text{--->} R^+ \cup \{0\} = \{(x,y)/y = -\sqrt{x}\}$ es biyectiva.

NOTA:

* Si una función no es sobreyectiva, para que sea, se debe restringir el conjunto de llegada

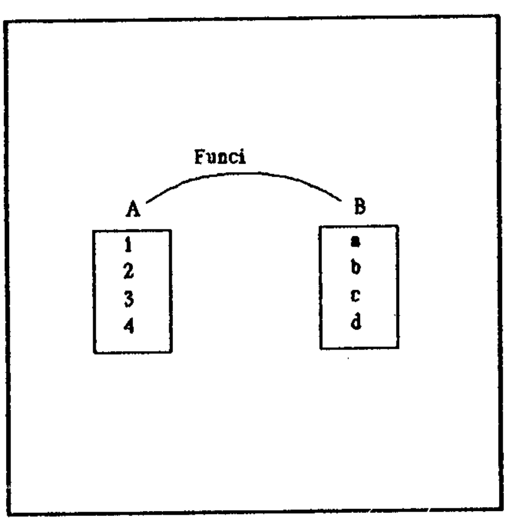
* Si una función no es inyectiva, para que sea, se debe restringir el conjunto de salida.

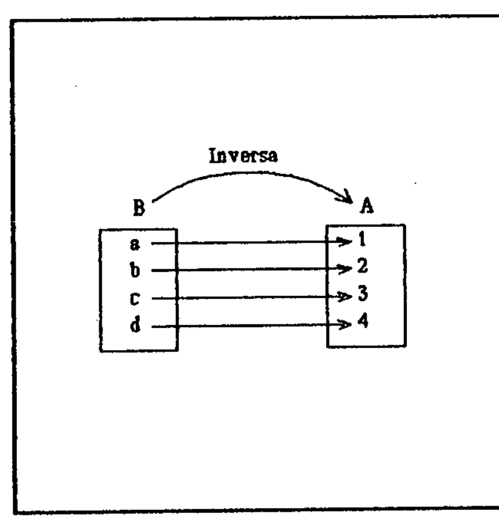
7.4. FUNCIÓN INVERSA O RECÍPROCA

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ y $h: A \text{--->} B$ una función definida en las diferentes formas o métodos.

1.- Diagrama Sagital





2.- Grafo de la función o pares ordenados

$h = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$

$h^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$

3.- Tabla

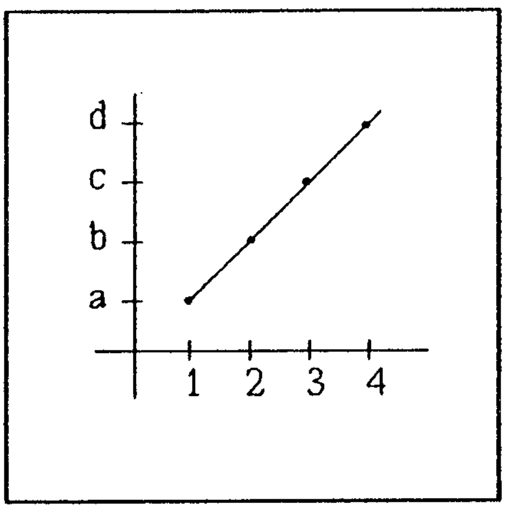
Función

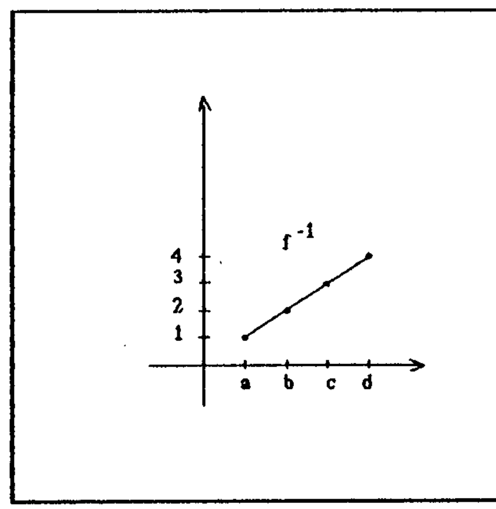
A	B
1	a
2	b
3	c
4	d

Inversa

B	A
a	1
b	2
c	3
d	4

4.- Gráfico





5.- Descripción Común

f: A cada número natural menor que 5 hacerle corresponder las cuatro primeras letras del abecedario.

f^{-1}: A las cuatro primeras letras del abecedario hacerle corresponder los números naturales menores que cinco.

Al observar las diferentes formas de representar una función vemos que a cada elemento del dominio le corresponde un solo elemento del codominio y en su inversa se intercambia el orden de las componentes de cada par ordenado, es decir aquellas que estaban como primeras componentes pasan a ser segundas componentes y recíprocamente. Todo esto nos indica que para determinar la inversa de una función se requiere que sea biyectiva.

La función inversa de una función inyectiva f se denota por el símbolo f^{-1} que se lee: "f inversa" ó "función inversa".

Cuando f viene dada por $y = f(x)$, hemos dicho que x es variable independiente y que y es la variable dependiente. Los pares ordenados son de la forma (x,y).

La función inversa f^{-1} puede escribirse como $x = f^{-1}(y)$ donde y es la variable independiente, x es la variable dependiente y los pares ordenados son (y,x).

POR LO TANTO:

Si una función f: A ---> B es biyectiva entonces podemos definir su inversa

f^{-1}B --> A de la siguiente forma:

para cada $y \in B$ existe un único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$; definimos entonces; x por $f^{-1}(y)$, lo cual se expresa así:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Determine la inversa de la función.

   $f(x) = 3x - 1$

   DESARROLLO:

   Comprobamos si la función dada es biyectiva para lo cual verificamos si es inyectiva y sobreyectiva.

   Inyectiva

   $f(x)\ 3x - 1$

   $3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$

   $3x_1 = 3x_2$

   $x_1 = x_2$

   Si es unyectiva

   $f(x) = 3x - 1$

   $y_o = 3x_o - 1$

   $y_o - 1 = 3x_o$

   $$\frac{y_o - 1}{3} = x_o$$

$$f(x_o) = y_o$$

$$f(x_o) = 3x_o - 1$$

$$f(x_o) = \frac{3(y_o + 1) - 1}{3}$$

$$f(x_o) = y_o + 1 - 1$$

$$f(x_o) = y_o$$

Si es sobreyectiva

La función dada es biyectiva por lo tanto podemos determinar su inversa así:

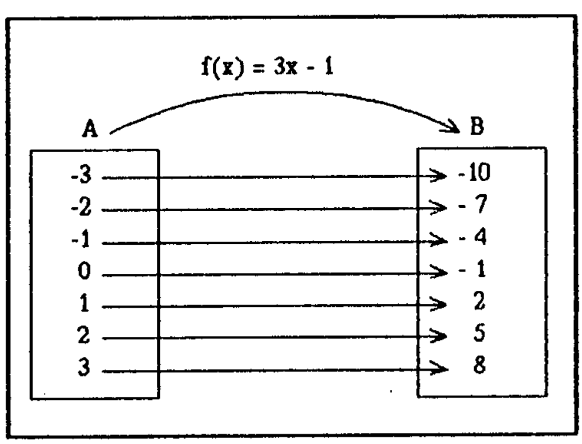
$f(x) = 3x - 1$

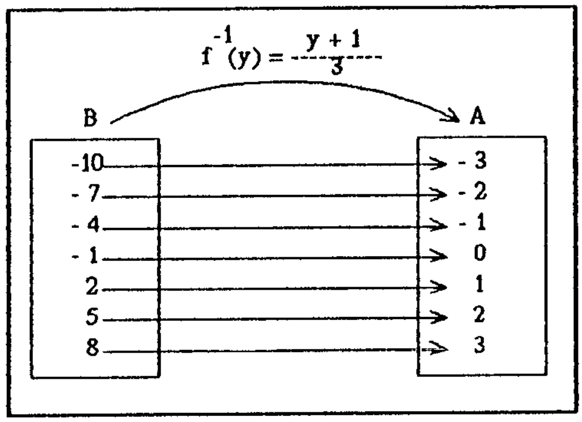
$y = 3x - 1$ despejamos x de la igualdad

$y + 1 = 3x$

$\frac{y + 1}{3} = x$ entonces la función inversa es:

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 1}{3}$$





2. Pruebe si las siguientes funciones son biyectivas, luego calcule su inversa.

a) $f(x) = /x/$

b) $h(x) = -3x + 2$

c) $g(x) = \dfrac{2 - 15x}{5}$

d) $f(x) = x^2 - 9$

e) $h(x) = /x-2/$

DESARROLLO:

a) $f(x) = /x/$

$/x_1/ = /x_2/$

$x_1 \neq \pm x_2$

$f(x) = /x/$

$y = /x/$

$y_o = /x_o/$

$x_o = y_o$

$f(x_o) = y_o$

Si es sobreyectiva

En consecuencia no es biyectiva, po lo tanto no tiene inversa.

b) $h(x) = -3x + 2$

$3x_1 + 2 = -3x_2 + 2$

$-3x_1 = -3x_2$

$y = -3x + 2$

$y_o = -3x_o + 2$

$x_1 = x_2$

Si es inyectiva

$y_o - 2 = -3x_o$

$3x_o = 2 - y_o$

$$x_o = \frac{2 - y_o}{3}$$

$f(x_o) = y_o$

$f(x_o) = -3x_o + 2$

$$f(x_o) = -3\left(\frac{2 - y_o}{3}\right) + 2$$

$f(x_o) = -2 + y_o + 2$

$f(x_o) = y_o$

Si es sobreyectiva

Por lo tanto la función dada es biyectiva

Determinemos su inversa.

$h(x) = -3x + 2$

$y = -3x + 2$

$y - 2 = -3x$

$3x = 2 - y$

$$x = \frac{2 - y}{3}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{2 - y}{3}$$

c) $$g(x) = \frac{2 - 15x}{5}$$

DESARROLLO

$$\frac{2 - 15x_1}{5} = \frac{2 - 15x_2}{5}$$

$$y = \frac{2 - 15x}{5}$$

$$10 - 75x_1 = 10 - 75x_2$$

$$-75x_1 = -75x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Si es inyectiva

$$y_o = \frac{2 - 15x_o}{5}$$

$$5y_o = 2 - 15x_o$$

$$15y_o = 2 - 5y_o$$

$$x_o = \frac{2 - 5y_o}{15}$$

$$f(x_o) = y_o$$

$$f(x_o) = \frac{2 - 15x_o}{5}$$

$$f(x_o) = \frac{2 - 15\left(\frac{2 - 5y_o}{15}\right)}{5}$$

$$f(x_o) = \frac{2 - 2 + 5y_o}{5}$$

$$f(x_o) = \frac{5y_o}{5}$$

$$f(x_o) = y_o$$

Si es sobreyectiva

Por lo tanto es biyectiva

Determinamos su inversa.

$$g(x) = \frac{2 - 15x}{5}$$

$$y = \frac{2 - 15x}{5}$$

$$5y = 2 - 15x$$

$$15x = 2 - 5y$$

$$x = \frac{2 - 5y}{15}$$

$$g^{-1}(y) = \frac{2 - 5y}{15}$$

d) $f(x) = x^2 - 9$

DESARROLLO:

$x_1^2 - 9 = x_2^2 - 9$

$x_1^2 = x_2^2$

$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2}$

$x_1 \neq \pm x_2$

Si es inyectiva

$y = x^2 - 9$

$y_o = x_o^2 - 9$

$y_o + 9 = x_o$

$\sqrt{y_o + 9} = \sqrt{x_o^2}$

$\sqrt{y_o + 9} = x_o$

$x_o = \sqrt{y_o + 9}$

$f(x_o) = y_o$

$f(x_o) = \sqrt{(y_o + 9)^2} - 9$

$= y_o + 9 - 9$

$f(x_o) = y_o$

Si es sobreyectiva

Conclusión:

La función dada no es biyectiva por lo tanto no tiene inversa.

e) $h(x) = /x-2/$

No es biyectiva

Por lo tanto no tiene inversa

3. Encuentre el dominio y el recorrido de $h(x) = (x - 25)/5$ luego calcule la inversa si es posible y realice una gráfica de f y f^{-1} en el mismo sistema de coordenadas.

DESARROLLO:

a) El dominio de la función dada son los reales (R)

b) Determinemos el codominio

$$y = \frac{x - 25}{5}$$

$$5y = x - 25$$

$$5y + 25 = x$$

El codominio de la función son los reles.

c) Verifiquemos si la función es biyectiva.

$$h(x) = \frac{x - 25}{5}$$

$$\frac{x_1 - 25}{5} = \frac{x_2 - 25}{5}$$

$$5x_1 - 125 = 5x_2 - 125$$

$$5x_1 = 5x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Si es inyectiva

$$y = \frac{x - 25}{5}$$

$$y_o = \frac{x_o - 25}{5}$$

$$5y_o = x_o - 25$$

$$5y_o + 25 = x_o$$

$$x_o = 5y_o + 25$$

$$f(x_o)=y_o$$

$$f(x_o) = \frac{x_o - 25}{5}$$

$$f(x_o) = \frac{5y_o + 25 - 25}{5}$$

$$f(x_o) = \frac{5y_o}{5}$$

$$f(x_o) = y_o$$

Si es sobreyectiva

Por lo tanto es biyectiva

d) Determinemos su inversa.

$$h(x) = \frac{x - 25}{5}$$

$$y = \frac{x - 25}{5}$$

$5y = x - 25$

$5y + 25 = x$

$h^{-1}(y) = 5y + 25$

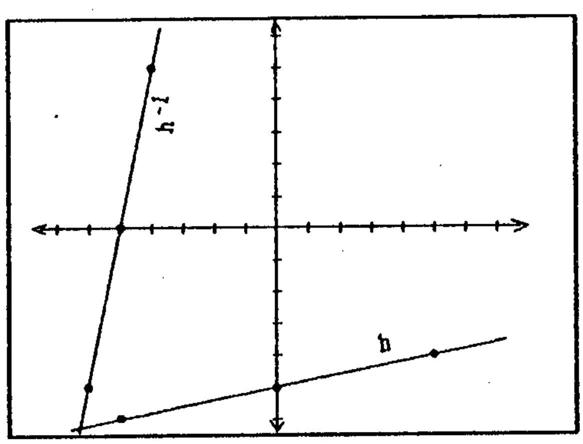
e) Realizamos su gráfico.

$$y = \frac{x - 25}{5}$$

A	B
-5	-6
0	-5
5	-4

$h^{-1} = 5y + 25$

B	A
-6	-5
-5	0
-4	5



4. En el siguiente caso determine si f es biyectiva. En caso afirmativo calcule su inversa.

$$f: R \longrightarrow R \text{ definida por: } f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 2, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x + 1, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

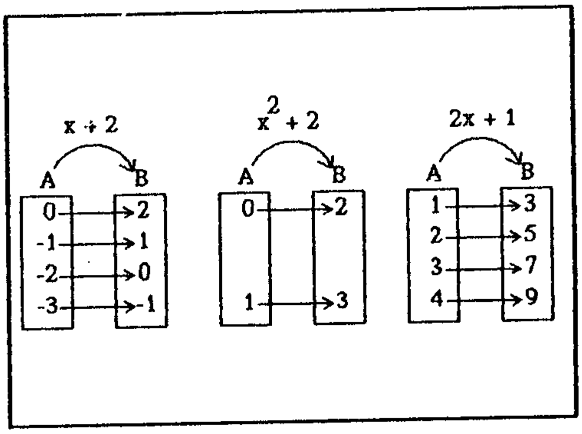
DESARROLLO:

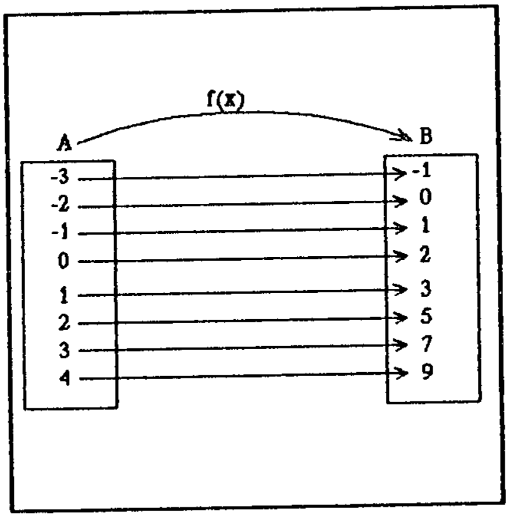
$x \leq 0 =]-\alpha...0]$

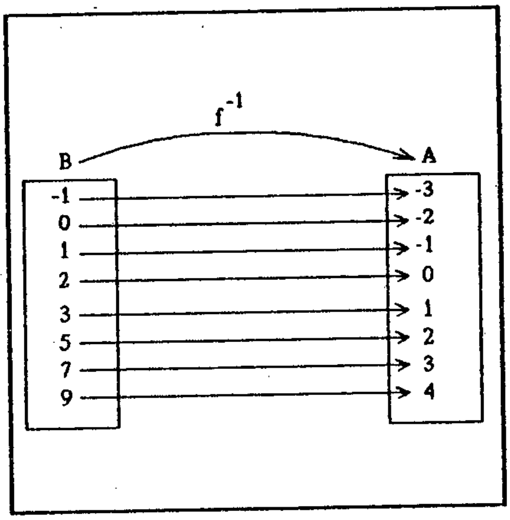
$0 < x < 1 =]0,1[$

$x \geq 1 = [1...\alpha[$

Determinamos los elementos del codominio.







Si es biyectiva

5. Dada la función h: R ---> R definida por $x^2 + 1$

Hallar:

a) $f^{-1}(5)$ =

b) $f^{-1}(10)$ =

c) $f^{-1}(2)$ =

DESARROLLO:

$y = x^2 + 1$

$y - 1 = x^2$

$x = \sqrt{y - 1}$

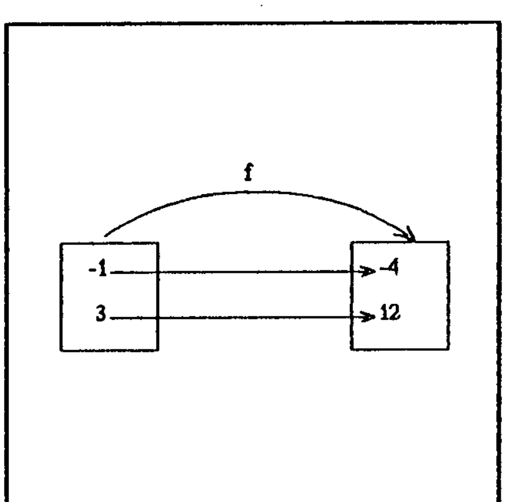
$f(y) = \sqrt{y - 1}$

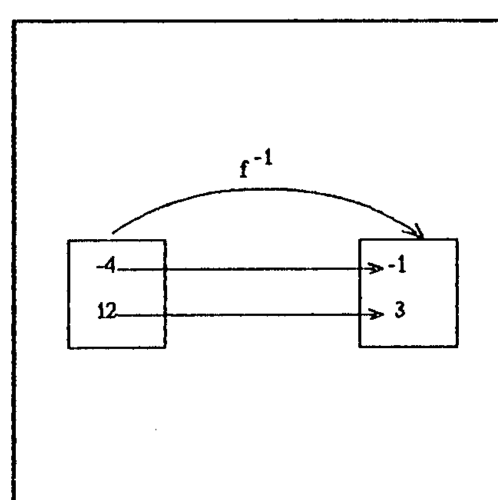
$f(5) = \sqrt{5 - 1}$ $f(10) = \sqrt{10 - 1}$ $f(2) = \sqrt{2 - 1}$

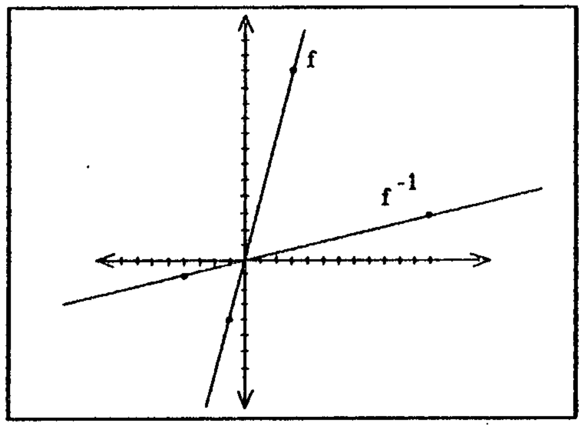
$f(5) = \pm 2$ $f(10) = \pm 3$ $f(2) = \pm 1$

6. En el siguiente ejercicio trazar la gráfica de f y f^{-1}, en un mismo sistema de coordenadas, si f: [-1,3] => [-4,12]

$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 2x - 3$$







7. Encontrar la función inversa (si existe) y trazar la gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas si $f(x) = x^3 - 8$.

$$f(x) = x^3 - 8$$

$$x_1^3 - 8 = x_2^3 - 8$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$\sqrt{(x_1)^3} = \sqrt{(x_2)^3}$$

$$x_1 = x_2$$

Si es inyectiva

$$y = x^3 - 8$$

$$y_0 = x_0^3 - 8$$

$$y_0 + 8 = x_0^3$$

$$x_0 = \sqrt{y_0 + 8}$$

$$f(x_0) = y_0$$

$$f(x_0) = x_0^3 - 8$$

$$f(x_0) = \sqrt{(y_0 + 8)^3} - 8$$

$$f(x_0) = y_0 + 8 - 8$$

$$f(x_0) = y_0$$

Si es sobreyectiva

Por lo tanto es biyectiva

Determinemos su inversa.

$$y = x^3 - 8$$

$$x = \sqrt{y + 8}$$

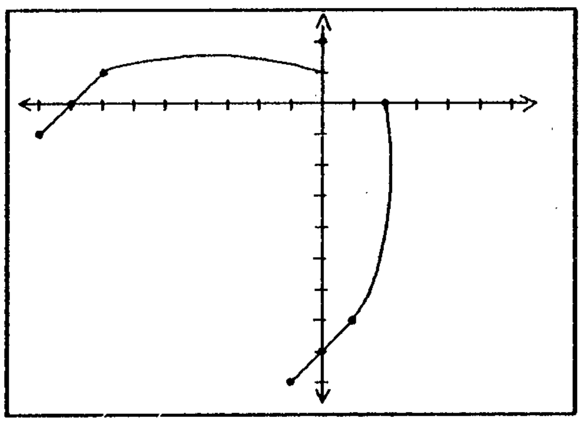
$f^{-1}(y) = \sqrt{y + 8}$

$f(x) = x^3 - 8$

A	B
0	-8
1	-7
2	0
-1	-9

$f^{-1}(y) = y + 8$

A	B
-8	0
-7	1
0	2
9	-1



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 7

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos:

1.- Escriba una (I) dentro del paréntesis si el grafo de la función es inyectiva y una (S) si es sobreyectiva.

a. (   ) {(1,1),(2,2),(3,3),(4,3),(5,4)}

b. (   ) {(4,3),(5,2),(6,3),(7,1),(8,1)}

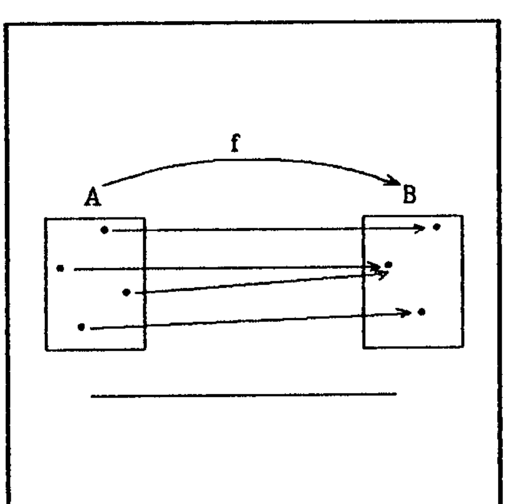
c. (   ) {(5,2),(10,3),(6,6),(7,5)}

d. (   ) {(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(e,f),(f,e)}

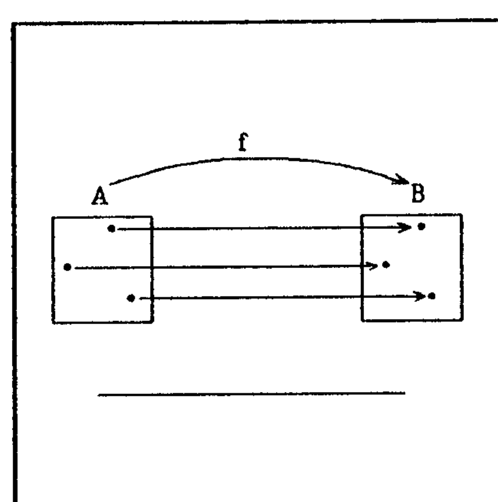
e. (   ) {(3,6),(2,4),(4,8),(1,2),(-1,62),(4,8)}

2.- Al pie de cada gráfico escriba el nombre de la función a la que corresponde.

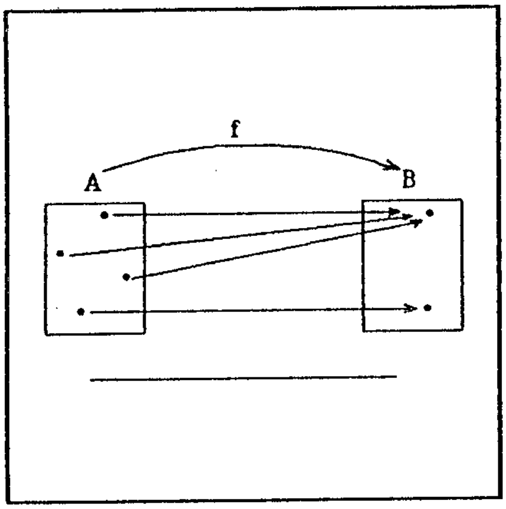
a)



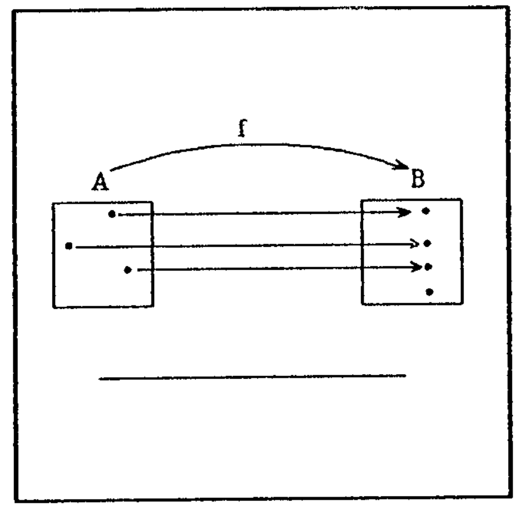
b)



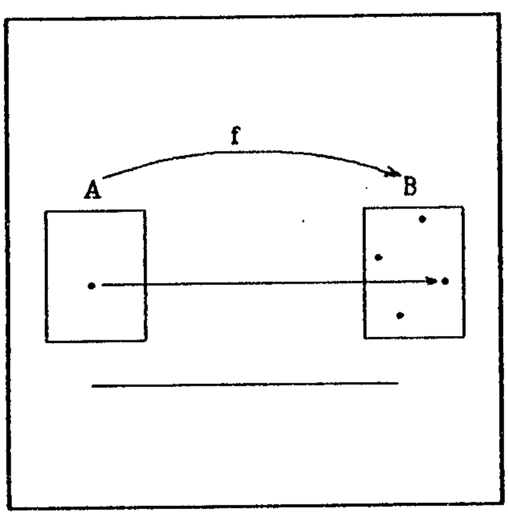
c)



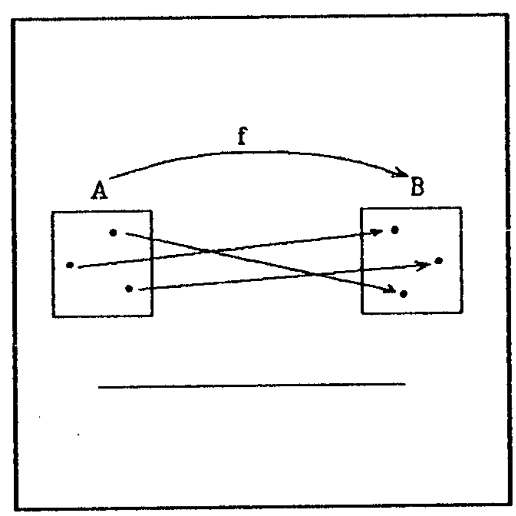
d)



e)



f)



3.- Escriba el tipo de función al que pertenecen las siguientes funciones:

a) A cada provincia ecuatoriana hacerle corresponder su capital.

b) A cada alumno de un paralelo asignarle un profesor de matemática.

c) A cada provincia ecuatoriana le corresponde su presupuesto.

d) "a es perpendicular a b" entre líneas.
e) "x siguiente de y" en Z

4.- Determine si las siguientes relaciones son funciones; Inyectivas, Sobreyectivas o Biyectivas y trace su gráfico.

a) $f: R \longrightarrow R^+,\ x \longrightarrow f(x) = x^2$

b) $f: R \longrightarrow R,\ f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$

c) $f: R \longrightarrow R,\ f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\ ,\quad 0 \le x \le 1/2$

e) $f: R^+ \longrightarrow R,\ f(x) = 1 - 2/x^2$

5.- Dadas las siguientes funciones. Encontrar su inversa (si existe) dominio y codominio luego trazar la gráfica de f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas:

a) $h(x) = 3x + 6$

b) $f(x) = x^3$

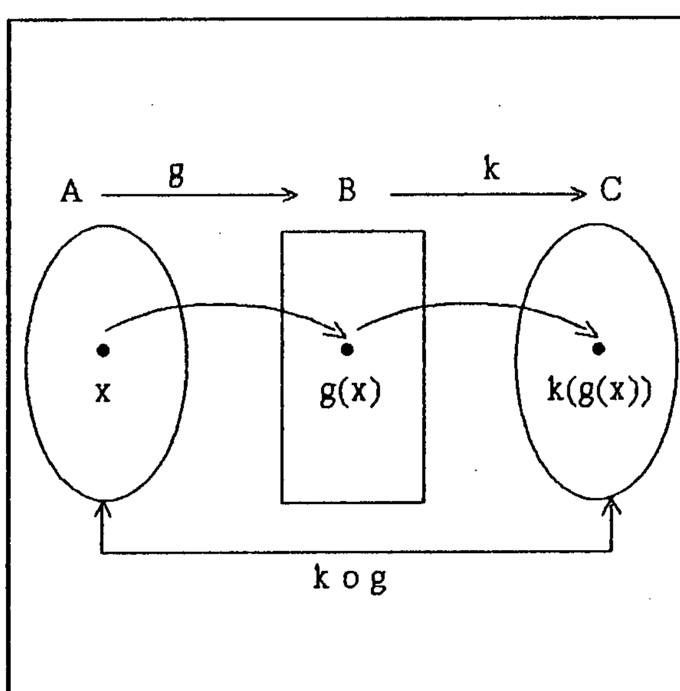
c) $h(x) = \dfrac{x + 6}{2}$

d) $g(x) = x^{1/3}$

e) $g(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$

6.- Determine la función inversa de $f(x) = 4x + 10$ y defínala en las seis formas.

UNIDAD 8: COMPOSICION DE FUNCIONES	8.1. Definición 8.2. Cálculo de funciones compuestas 8.3. Propiedades



OBJETIVO 08	Determinar la función producto tanto analítica como gráficamente y demostrar sus propiedades.

8.1. ¿COMO DEFINIMOS A UNA FUNCION PRODUCTO?

Analicemos el siguiente ejemplo:

En un colegio se realiza una rifa y los números se reparten entre los siguientes alumnos: Luis, Carlos, José, Miguel, Jorge, Kléver, Manuel, Efrén, Félix y Vinicio. Hay el mismo número de boletos como alumnos, de tal manera que a cada uno le corresponde un número.

A es el conjunto de alumnos
B es el conjunto de los boletos
B´ es el conjunto de los premios

A = {Luis,Carlos,José,Miguel, Jorge,Kléver,Manuel, Efrén,Félix,Vinicio}

B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

B´ = {1ro,2do,3ro,4to,5to,6to,7mo, 8avo, 9no, 10mo}

Formemos las funciones respectivas mediante tablas.

P: A ---> B que hace corresponder a cada alumno su número para la rifa.

P: A ---> B

Luis	10
Carlos	8
José	7
Miguel	5
Jorge	9
Kléver	4
Manuel	1
Efrén	2
Félix	6
Vinicio	3

Q: B --->B´ función que hace corresponder a cada boleto su premio.

Q: B ---> B´

1	4to.
2	10mo.
3	3ro.
4	9no.
5	1ro.
6	8avo.
7	6to.
8	2do.
9	5to.
10	7mo.

La composición entre éstas dos funciones nos da la correspondencia entre los alumnos y los premios que ganaron.

Formemos la tabla Q o P considerando las funciones anteriores.

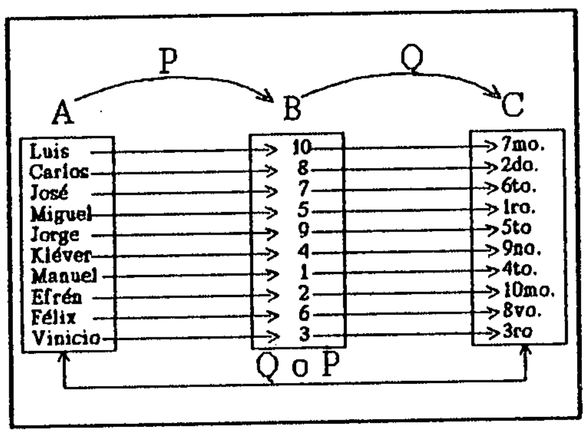
Empecemos con el alumno Luis que tiene el número 10 según P: al boleto 10 le corresponde el premio 7mo., según Q.

Entonces en la tabla de Q o P anotaremos que: al alumno Luis le corresponde el premio 7mo.

Al alumno Carlos que tiene el boleto número 8 le corresponde el 2do. premio.

Al alumno José que tiene el boleto con el número 7, le corresponde el 6to. premio, y así sucesivamente hasta concluir con todos los alumnos.

Q	o P
Luis	7mo.
Carlos	2do.
José	6to.
Miguel	1ro.
Jorge	5to.
Kléver	9no.
Manuel	4to.
Efrén	10mo.
Félix	8avo.
Vinicio	3ro.



Como observamos en el diagrama sagital que el conjunto B = conjunto de los boletos de la rifa, es imagen de la primera función P, y dominio de la segunda función Q.

Por esta razón cada alumno tiene el premio respectivo.

El dominio de Q o P (función producto) es el conjunto de alumnos.

El codominio de Q o P lo obtenemos así:

P(Luis)	= 10 $\wedge$ Q(10)	= 7mo.	=>	Q(Luis)	=	7mo.
P(Carlos)	= 8 $\wedge$ Q(8)	= 2do.	=>	Q(Carlos)	=	2do.
P(José)	= 7 $\wedge$ Q(7)	= 6to.	=>	Q(José)	=	6to.
P(Miguel)	= 5 $\wedge$ Q(5)	= 1ro.	=>	Q(Miguel)	=	1ro.
P(Jorge)	= 9 $\wedge$ Q(9)	= 5to.	=>	Q(Jorge)	=	5to.
P(Kléver)	= 4 $\wedge$ Q(4)	= 9no.	=>	Q(Kléver)	=	9no.
P(Manuel)	= 1 $\wedge$ Q(1)	= 4to.	=>	Q(Manuel)	=	4to.
P(Efrén)	= 2 $\wedge$ Q(2)	= 10mo.	=>	Q(Efrén)	=	10mo.
P(Félix)	= 6 $\wedge$ Q(6)	= 8avo.	=>	Q(Félix)	=	8avo.
P(Vinicio)	= 3 $\wedge$ Q(3)	= 3ro.	=>	Q(Vinicio)	=	3ro.

Por lo tanto el codominio de Q o P es el conjunto de premios.

Consideremos otro ejemplo:

Sea $h(x) = (x + 2)^2$

¿Qué operaciones realizamos para calcular $h(x)$, dado x?

Primeramente hay que sumar 2 a x para obtener un número que lo llamaremos v

$$v = x + 2$$

Luego elevaremos v al cuadrado, obteniéndose otro número que lo denotamos con z.

$$z = v^2$$

Con lo cual z es el valor de $h(x)$

Para calcular $h(x)$ hemos aplicado dos reglas de carácter algebráico: "sumar 2" y al total "elevar al cuadrado"; es decir para calcular $h(x)$, tenemos que aplicar una después de otra, dos funciones, la primera g que hace corresponder a un número real que resulta de sumar 2 y la función k que hace corresponder al número real su cuadrado.

$$g(x) = x + 2$$

$$k(x) = x^2$$

Una vez obtenido el real $g(x) = x + 2$, a partir del real x, hacemos actuar la función k para conseguir g.

$$k(g(x)) = (g(x))^2$$

$$k(g(x)) = (x + 2)^2$$

Concluyendo tenemos que:

$$h(x) = k(g(x))$$

De esta forma diremos que h se ha obtenido de la composición de las funciones g y k que se simboliza por (k o g) ó (kf), colocando un círculo pequeñito entre las dos. Esta nueva función toma el nombre de función-producto ó función compuesta de g con k ó también composición de g con k.

La razón por la que se anota "al revés" las dos letras la da el orden de actuación de las funciones: primero g y después k.

Para que este cálculo tenga sentido es necesario que el recorrido o imagen de la primera función sea subconjunto propio del dominio de la segunda función.

$$R_g \subset Dom_k = B$$

En base a las indicaciones expuestas anteriormente definimos la función producto así:

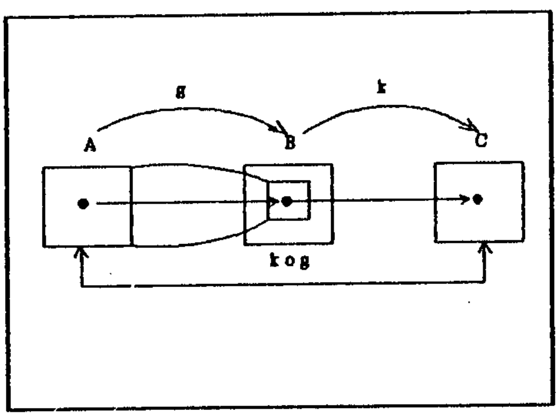
DEFINICION

Dados A, B y C tres conjuntos no vacíos y dos funciones g: A--->B, k: B--->C, llamamos función compuesta de g y k, a otra aplicación que relacione directamente los elementos del conjunto A con los del conjunto C y se denota por k o g a la función.

k o g : A ---> C

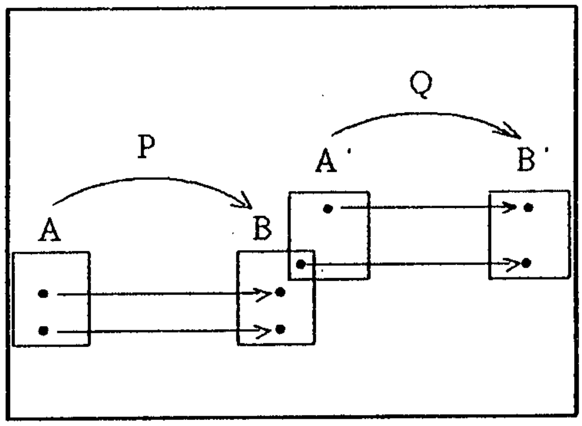
definida por (kog(x)) ≡ k(g(x))

≡ significa "igual por definición"



Observamos que el orden en el cual se escriben las funciones kog es inverso al orden en el cual se aplican, es decir, se aplica primero la que está más cerca de x.

Además tenga presente que al multiplicar dos funciones P:A--->B y Q:A´--->B´ puede ocurrir lo que indica la gráfica que a continuación dibujamos:

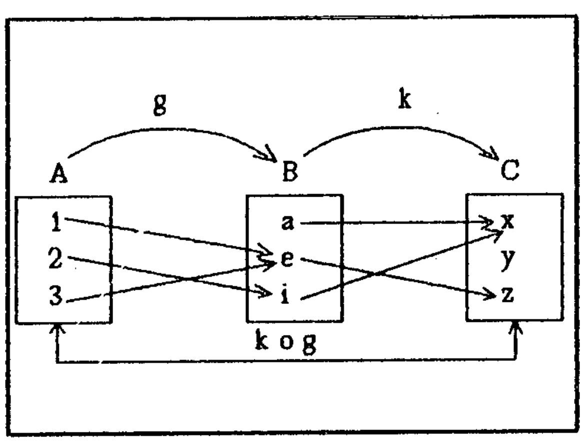


Vemos que ninguna flecha de la función P llega a A´; la imagen de P y el dominio de Q son disjuntos por lo tanto ningún elemento que esté en la imagen de A será transformado por Q y la composición Q o P no hará corresponder a ningún elemento de A en el elemento B´, a éste tipo de funciones que tiene su dominio e imagen vacío y que no puede efectuarse el producto, se denomina <u>función vacía</u>.

8.2. CALCULO DE FUNCIONES COMPUESTAS

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Dado g: A ---> B y k: B ---> C, definida por el siguiente diagrama:



DESARROLLO:

Calculando (k o g): A ---> C por la definición tenemos:

$k \circ g\ (1) \equiv k(g(1)) = k(e) = z$

$k \circ g\ (2) \equiv k(g(2)) = k(i) = x$

$k \circ g\ (3) \equiv k(g(3)) = k(e) = z$

Tenga presente que la función (k o g) es equivalente a seguir la flecha, desde A a C en los diagramas de las funciones g y k.

2.- Con las funciones g: R ---> R y k: R ---> R definidas por $g(x)=x^2+3x+1$, $k(x) = 2x-3$

Hallar las fórmulas respectivas para la función producto:

a) k o g

b) g o k

c) g o g

d) k o k

SOLUCION

a) k o g

$k \circ g\ (x) \equiv k(g(x)) \equiv k(x^2 + 3x + 1)$

Sustituímos la función g(x) en la fórmula de k(x) y realizamos las operaciones indicadas, así:

$kog = 2(x^2 + 3x + 1) - 3$

$kog = 2x^2 + 6x + 2) - 3$

$\underline{kog = 2x^2 + 6x - 1}$ sol.

b) g o k

$g \circ k\ (x) \equiv g(k(x)) = g\ (2x-3)$

$= (2x-3)^2 + 3(2x-3) + 1$

$= 4x^2 - 12x + 9 + 6x - 9 + 1$

$= \underline{4x^2 - 6x + 1}$ sol.

c) g o g

$g \circ g\ (x) \equiv g(g(x)) = g\ (x^2 + 3x + 1)$
$= (x^2 + 3x + 1)^2 + 3(x^2+3x+1) + 1$
$= x^4 + 6x^3+11x^2 + 6x+1+3x^2 +9x+3 + 1$
$= \underline{x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5}$ sol.

d) <u>k o k</u>

$$k \circ k\ (x) \equiv k(k(x)) = k\ (2x - 3)$$
$$= 2(2x - 3) - 3$$
$$= 4x - 6 - 3$$
$$= \underline{4x - 9} \quad \text{sol.}$$

3.- Dadas las funciones $g(x) = x - 2$ y $k(x) = x + 7$ de $R \longrightarrow R$; halle $k \circ g$ y $g \circ k$ y determine el dominio de la función compuesta.

DESARROLLO:

Primero determinamos el dominio de cada función.

Dom(g) = R

Dom(k) = R

Calculamos kog y gok y el dominio de cada producto.

<u>k o g</u>

$$k \circ g\ (x) \equiv k(g(x)) = k(x - 2)$$
$$= x - 2 + 7$$
$$= \underline{x + 5} \quad \text{sol.}$$

Dom(kog) = R

<u>g o k</u>

$$g \circ k\ (x) \equiv g(k(x)) = g(x + 7)$$
$$= x + 7 - 2$$
$$= \underline{x + 5} \quad \text{sol.}$$

Dom(gok) = R

4.- Con el conjunto B = {-3,-2,-1,0,1,2,3,} y las funciones de B en B definidas por las fórmulas: $g(x) = 2x$, $k(x) = x + 1$. Determinar la función producto kog y gok y realice el diagrama de Venn de cada una de ellas.

DESARROLLO:

Determinamos la fórmula de la función producto <u>kog</u>

$$kog(x) \equiv k(g(x)) = k(2x)$$
$$= \underline{2x + 1} \quad \text{sol.}$$

Calculamos las imagenes de kog

kog = 2x + 1

kog(-3) = 2(-3) + 1 = - 6 + 1 = - 5

kog(-2) = 2(-2) + 1 = - 4 + 1 = - 3

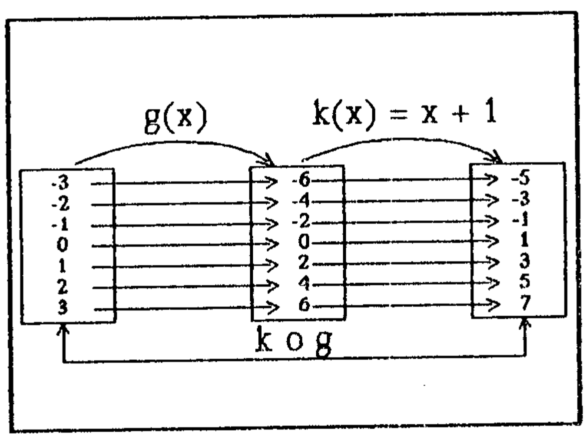
kog(-1) = 2(-1) + 1 = - 2 + 1 = - 1

kog(0) = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1

kog(1) = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3

kog(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5

kog(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7



Determinamos la fórmula de la función producto gok

$$gok\ (x) \equiv g(k(x)) = g\ (x + 1)$$

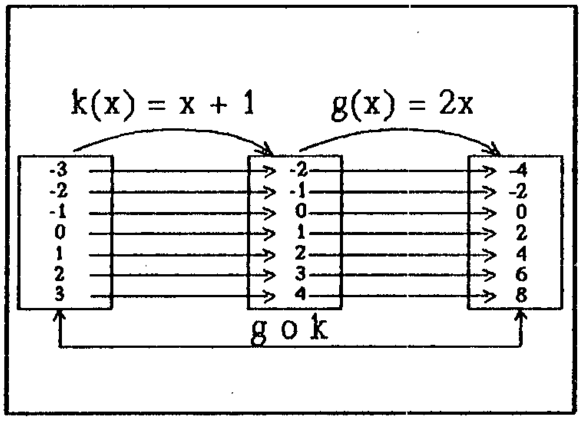
$$= 2\ (x + 1)$$

$$= \underline{2x + 2} \qquad \text{sol.}$$

Calculamos las imágenes de gok

Otra forma de determinar la imagen de una función-producto es sustituyendo cada elemento del conjunto dado en la fórmula (k=x+1) y este valor en la forma (g=2x)

gok (-3) ≡ g(k(-3)) = g (-2) = -4
gok (-2) ≡ g(k(-2)) = g (-1) = -2
gok (-1) ≡ g(k(-1)) = g (0) = 0
gok (0) ≡ g(k(0)) = g (1) = 2
gok (1) ≡ g(k(1)) = g (2) = 4
gok (2) ≡ g(k(2)) = g (3) = 6
gok (3) ≡ g(k(3)) = g (4) = 8



Comparando la imagen de gok y kog vemos que son diferentes, esto nos permite hacer la siguiente observación:

> El producto de funciones no siempre es conmutativo
>
> gok ≠ kog

Decimos no siempre, porque existen casos en los cuales gok = kog como vemos en el siguiente ejemplo y en un anterior, donde si se cumple la propiedad conmutativa; pero, esto es en casos muy especiales.

5.- Dado el conjunto P = {1,2,3,4} y las funciones:

g: P ---> P tal que:g(1) = 2;g(2) = 4;g(3) = 1;g(4) = 3
k: P ---> P tal que:k(1) = 4;k(2) = 3;k(3) = 2;k(4) = 1

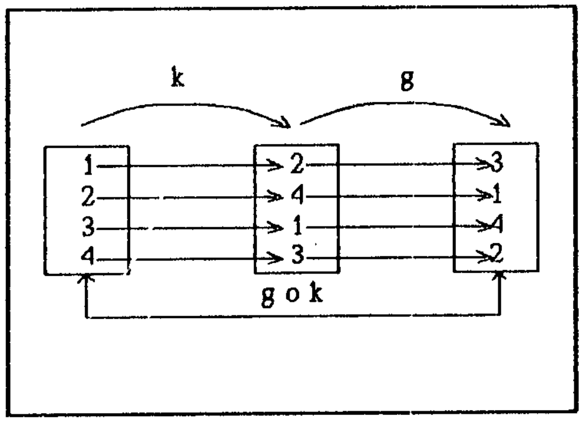
Determine gok y kog.

DESARROLLO:

Aplicando la defínción de función compuesta tenemos:

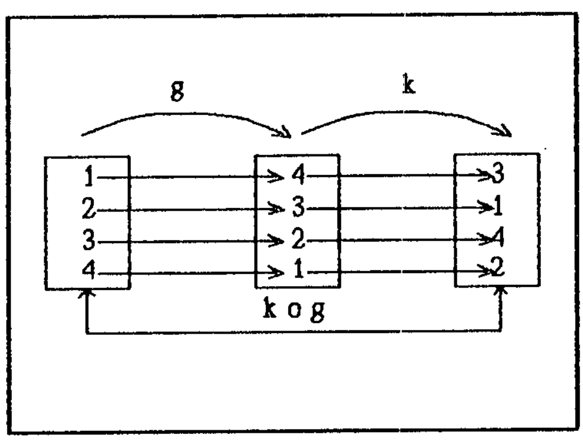
<u>gok</u>

gok (1) = g(k(1)) = g(4) = 3
gok (2) = g(k(2)) = g(3) = 1
gok (3) = g(k(3)) = g(2) = 4
gok (4) = g(k(4)) = g(1) = 2



kog

kog (1) = k(g(1)) = k(2) = 3
kog (2) = k(g(2)) = k(4) = 1
kog (3) = k(g(3)) = k(1) = 4
kog (4) = k(g(4)) = k(3) = 2



6.- Hallar f(x) si g(x) y gof(x) viene dado como sigue:

$g(x) = x^3$

$gof\ (x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

DESARROLLO:

$gof\ (x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$gof\ (x) = (x - 1)^3$

como $g(x) = x^3$

$gof\ (x) = g\ (f(x))$

$= (f(x))^3$

$(x - 1)^3 = (f(x))^3$

$(x - 1)^3 = (f(x))^3$

$\sqrt[3]{(x - 1)^3} = \sqrt[3]{f(x)^3}$; $x - 1 = f(x)$

Por lo tanto $f(x) = x - 1$

7.- Calcular $fog(x)$ y su dominio si:

$f(x) = x^2 + 2x + 1$

$g(x) = - x + 2$

DESARROLLO:

$fog\ (x) \equiv f(g(x)) = f\ (- x + 2) = (2-x)^2 + 2(-x+2) + 1$

$= 4 - 4x + x^2 -2x + 4 + 1$

$= \underline{x^2 - 6x + 9}$ sol.

Dom (fog) = R

8.- Demostrar a qué clase de función pertenecen: $f(x) = 3-2x$ y $g(x)=6-3x$, luego verificar si su producto es de igual tipo.

DESARROLLO:

$f(x) = 3 - 2x$

$x_1 = x_2$

$3 - 2x_1 = 3 - 2x_2$

$-2x_1 = -2x_2$

$x_1 = x_2$

Por lo tanto es inyectiva

$g(x) = 6 - 3x$

$x_1 = x_2$

$6 - 3x_1 = 6 - 3x_2$

$-3x_1 = -3x_2$

$x_1 = x_2$

Por lo tanto es inyectiva

De esta forma hemos comprobado que las funciones dadas son inyectivas. Ahora probamos si su producto también es función inyectiva.

<u>fog</u>

$fog(x) \equiv f(g(x)) = f(6 - 3x)$

$= 3 - 2\ (6 - 3x)$

$= 3 - 12 + 6x$

$= 6x - 9$

$= \underline{2x - 3}$ sol.

Verificamos si es inyectiva:

$fog\ (x) = 2x - 3$

$x_1 = x_2$

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$

Por lo tanto el producto fog(x) es inyectivo

Del ejercicio desarrollado podemos concluir:

QUE:

- Si f y g son funciones inyectivas, también lo es gof.
- Si f y g son funciones sobreyectivas, también lo es gof.
- Si f y g son funciones biyectivas, también lo es gof.

8.3. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE FUNCIONES

Las propiedades de un producto de funciones son:

a) Conmutativa
b) Asociativa

a) <u>PROPIEDAD CONMUTATIVA</u>

De lo estudiado anteriormente podemos decir que el producto de funciones no siempre cumple con la propiedad conmutativa.

b) <u>PROPIEDAD ASOCIATIVA</u>

(Seymour-Lipschutz, 1976, pág. 49)

Sean f: A ---> B ; g: B ---> C y h: C ---> D. Entonces como se muestra en la figura 4.1. se pueden formar las funciones producto (gof):A--->B y la ho(gof): A ---> D

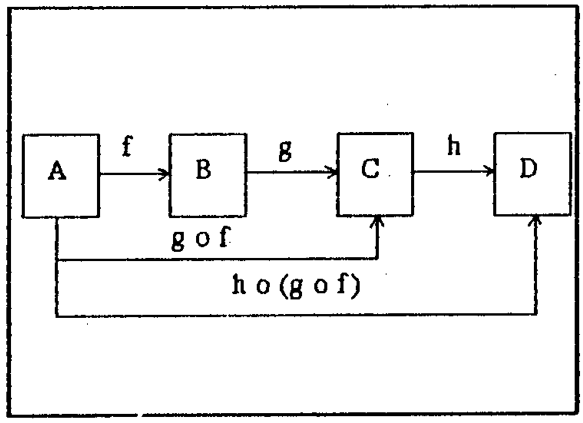


Fig. 4.1.

Así mismo, como se ilustra en la fig. 4.2., se puede formar la función producto hog: B ---> D y luego la función (hog): f:A--->D

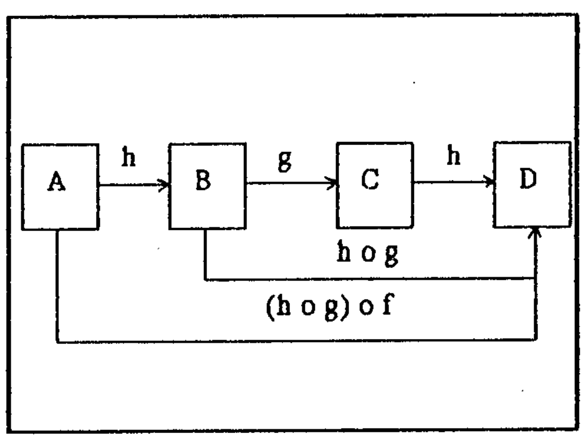


Fig. 4.2.

Ambas ho(gof) y (hog)of son funciones de A en D. Un teorema fundamental sobre las funciones afirma que éstas funciones son iguales, a saber:

<u>TEOREMA 4.1.</u>: Sean f: A ---> B , g: B ---> C y h: C-->D.

Entonces

(hog) o f = ho(gof)

En vista de este teorema 4.1. se puede escribir:

hogof: A ---> D sin paréntesis

EJERCICIOS

1.- Demostrar la propiedad asociativa con las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x + 6$

$g(x) = x$

$h(x) = x + 1$

DESARROLLO:

$(gof) \circ k$	$=$	$go(fok)$
$g(f(x)) \circ k$	$=$	$go(f(k(x)))$
$g(3x+6) \circ k$	$=$	$go(f(x + 1))$
$(3x+6) \circ k$	$=$	$go(3(x+1) + 6))$
$(gof) \circ k$	$=$	$go(3x + 9)$
$gof(k(x))$	$=$	$go(fok)$
$gof(x+1)$	$=$	$go((fok)(x))$
$3(x+1) + 6$	$=$	$go(3x + 9)$
$3x + 3 + 6$		
$3x + 9$	$=$	$3x + 9$

b) $f(x) = x + 4$

$g(x) = 2x - 1$

$k(x) = 3x$

DESARROLLO:

$(fog) \circ k$	$=$	$fo(gok)$
$f(g(x)) \circ k$	$=$	$fo(g(k(x)))$
$f(2x-1) \circ k$	$=$	$fo(g(3x))$
$(2x-1+4) \circ k$	$=$	$fo(2(3x) - 1))$
$(2x + 3) \circ k$	$=$	$fo(6x - 1)$
$(fog) \circ k$	$=$	$fo(gok)$
$(fog)\ k(x)$	$=$	$f(gok(x))$

$$(fog)\ (3x) = f(6x - 1)$$

$$2\ (3x) + 3 = 6x - 1 + 4$$

$$6x + 3 = 6x + 1$$

c) $f(x) = 3x - 2$

$g(x) = x/2$

$k(x) = 4x$

DESARROLLO:

$$(fog)\ o\ k = fo(gok)$$

$$f(g(x))\ o\ k = fo(g(k(x)))$$

$$f(x/2)\ o\ k = fo(g(4x))$$

$$3(x/2) - 2\ o\ k = fo(4x/2)$$

$$(3x - 2)/2\ o\ k = fo(2x)$$

$$(fog)\ o\ k = fo(gok)$$

$$fog\ \ k(x) = fo(gok(x))$$

$$fog\ (4x) = fo\ (2x)$$

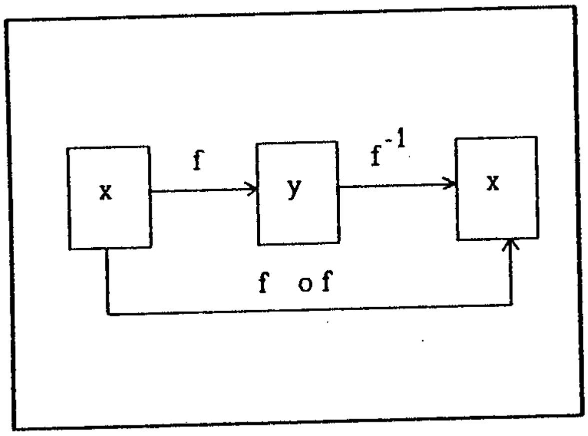
$$3\ (4x) - 4/2 = 3\ (2x) - 2$$

$$12x - 4/2 = 3(2x) - 2$$

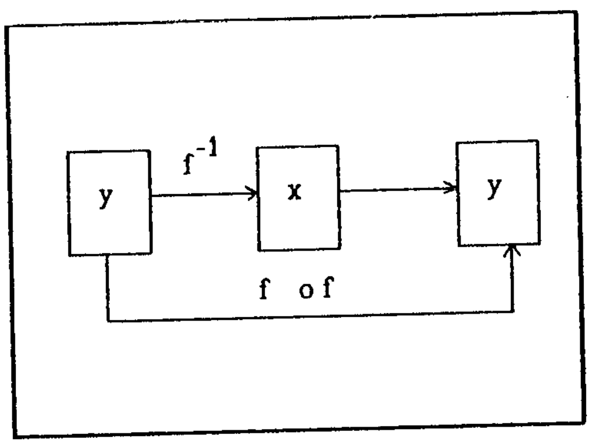
$$6x - 2 = 6x - 2$$

COMPOSICION CON LA FUNCION INVERSA

Dado f: A ----> B, una función biyectiva, y f^{-1} de B ----> A su función inversa y al realizar el producto f^{-1} o f , ó f o f^{-1} obtenemos una función identidad del conjunto A o del conjunto B respectivamente.



$\boxed{f^{-1} \text{ o } f(x)=x}$



$\boxed{f^{-1} \text{ o } f(x)=y}$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Los teoremas fundamentales sobre la función recíproca (según Seymour Lipschutz, 1976, pág. 51) son:

1.- Sea la función f: A ---> B inyectiva y sobreyectiva, o sea que la función recíproca f^{-1} : B ---> A existe.

Entonces el producto de composiciones

(f^{-1} o f) : A ---> A

es la función idéntica sobre A, y el producto de composición.

(f o f^{-1}) : B ---> B

es la función idéntica sobre B.

2.- Sean f: A ---> B y g: B ---> A. Si la función producto de composición (gof) : A ---> A es la función idéntica sobre A y si (fog) : B ---> B es la función idéntica sobre B, g es función recíproca de f, es decir, $g = f^{-1}$

Ambas condiciones son necesarias.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Dada la función $f(x) = 3x - 2$ y su inversa $f^{-1}=(y+2)/3$. Hallar f^{-1} o f y fof^{-1}

DESARROLLO:

$$f(x) = 3x - 2$$

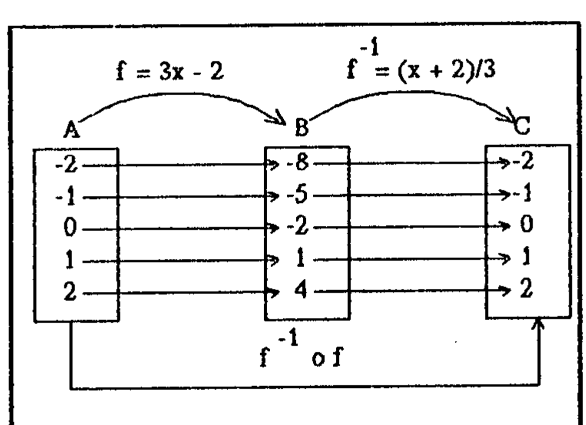
$$f^{-1}(x) = \frac{y+2}{3}$$

Para facilitar el desarrollo del ejercicio sobre la composición de funciones con su inversa es necesario cambiar la variable y por x o x por y, así:

$$f^{-1}(x) = \frac{y+2}{3}$$

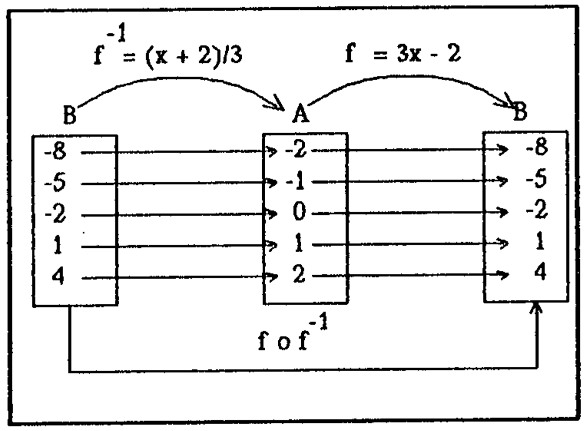
cambiando $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$

$$\underline{f^{-1} \circ f(x)} = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(3x-2) = \frac{3x-2+2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$



$$\underline{f \circ f^{-1}(y)} = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{y+2}{3}\right) = 3\left(\frac{y+2}{3}\right)-2$$

$$= y + 2 - 2 = y$$



2.- Con la función $g(x) = x - 5$ y la inversa $g^{-1} = y + 5$. Determinar $g \circ g^{-1}$ y $g^{-1} \circ g$

DESARROLLO:

Calculamos $g \circ g^{-1}(x)$

$$g \circ g^{-1}(x) \equiv g(g(x)) = g(x + 5) = x + 5 - 5 = x$$

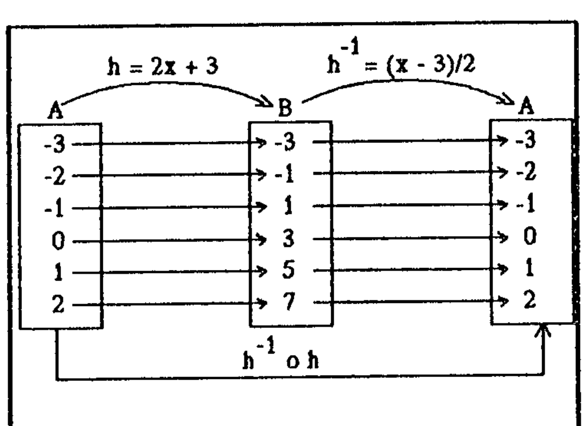
Calculamos $g^{-1} \circ g(y)$

$$g^{-1} \circ g(y) \equiv g^{-1}(g(y)) = g^{-1}(y - 5) = y - 5 + 5 = y$$

3.- Sea la función $h(x) = 2x + 3$ y $h^{-1} = (y-3)/2$. Represente $h^{-1} \circ h$ y $h \circ h^{-1}$ en forma gráfica.

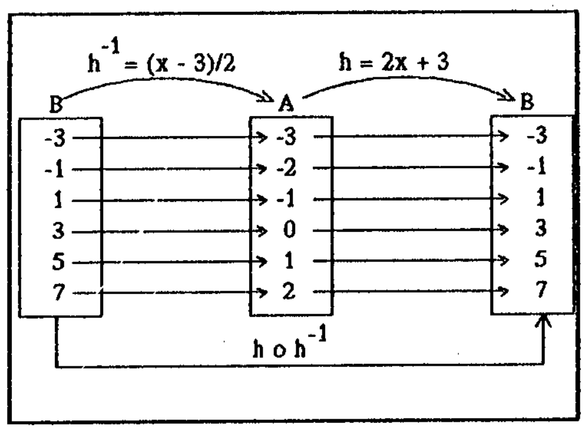
DESARROLLO:

Representamos gráficamente el producto $h^{-1} \circ h$



$h^{-1} \circ h: A \dashrightarrow A = A$

Representamos gráficamente el producto h o h^{-1}

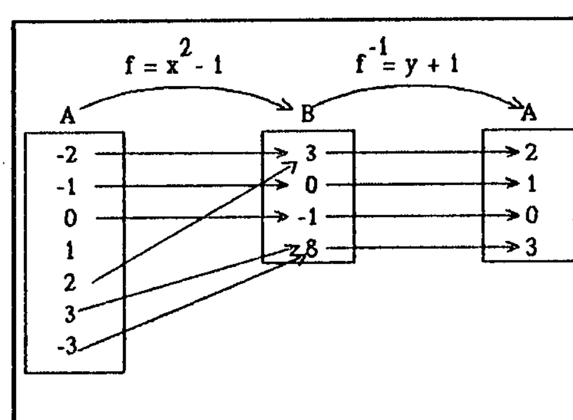


h o h^{-1}: B ---> B = B

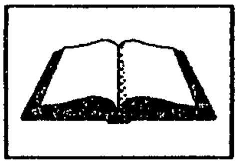
4.- Sea la función $f(x) = x^2 - 1$ y $f^{-1} = \sqrt{y + 1}$. Hallar: f^{-1} o f y f o f^{-1}

DESARROLLO:

Determinemos f^{-1} o f



Como se observa en el gráfico la función dada es sobreyectiva pero no inyectiva por lo tanto no es biyectiva y es condición necesaria que para determinar la inversa, la función dada debe ser biyectiva.



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 8

<u>Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos</u>:

1.- Con las funciones $g: R \longrightarrow R$ y $k: R \longrightarrow R$ definidas por:
$g(x) = x^2 + 6x - 6$; y, $k(x) = 6x - 8$. Hallar las fórmulas respectivas para la función producto.

a) k o g
b) g o k
c) k o k
d) g o g

2.- Determine (g o k) (x) si:

$$f(x) = \begin{cases} & \text{si } /x/ \leq 1 \\ & \text{si } /x/ > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } /x/ \leq 2 \\ 2 & \text{si } /x/ > 2 \end{cases}$$

3.- Hallar f(x) si g(x) y (g o f) (x) vienen dadas como sigue:

$g(x) = x^2 + x + 3$
$(g \circ f)(x) = x^2 - 3x + 5$

4.- Con el conjunto A = {1,3,5,7,9} y las funciones de A-->A definidas por las fórmulas $f(x) = 3x$ y $g(x) = x - 1$. Determine la función producto (f o g) y (g o f) y luego represente mediante el diagrama de Venn.

5.- Determine (f o g) y (g o f) y el dominio de cada una de ellas si $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = x^2 + 3$; y, $g: R \longrightarrow R$, $g(x) = x - 6$.

6.- Demuestre, en un ejemplo propuesto por usted, que si f y g son inyectivas entonces su producto debe ser inyectivo.

7.- Demuestre la propiedad asociativa con las siguientes funciones:

$f(x) = 4x - 1$
$g(x) = 3x$
$h(x) = x + 2$

8.- Dada la siguiente función $f(x) = 5x + 3$. Determine $f^{-1} \circ f$ y $f \circ f^{-1}$ y represente gráficamente.

RESUMEN

FUNCION

Se llama función o aplicación de un conjunto A en un conjunto B, a toda relación f de A en B que cumple con la condición de que cada elemento de A está relacionado con un único elemento de B.

NOTACION

Una función se denota por cualquiera de las simbologías siguientes:

1.- $f: x \longrightarrow y$
2.- $x \xrightarrow{f} f(x)$
3.- $\{(x,y)/y = f(x)\}$
4.- $f: y = f(x)$
5.- $f: (x,y)$
6.- $f: A \longrightarrow B$

ELEMENTOS DE UNA FUNCION

Los elementos de una función son:

- Dominio (Dom(f)).- Está formado por el conjunto de partida.
- Codominio (cod(f)).- Está formado por las imágenes de los elementos del dominio.

FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCION

1.- Por descripciones comúnes
2.- Mediante tablas
3.- Por fórmulas
4.- Gráficamente

CLASES DE FUNCIONES

Las funciones se clasifican en:

1.- INYECTIVAS.- Una función $f: A \longrightarrow B$ es inyectiva si y sólo si satisface la siguiente propiedad:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \\ \quad\ a = b \Rightarrow f(a) = f(b) \end{array}}$$

2.- SOBREYECTIVAS.- Una función f: A ---> B es sobreyectiva si y sólo si satisface la siguiente propiedad:

$$\boxed{\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A / f(a) = b}$$

3.- BIYECTIVA.- Una función es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva.

4.- INVERSA RECIPROCA.- Si una función (f) es biyectiva entonces podemos definir su inversa (f^{-1}) diciendo que para cada $y \in B$ existe un único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

5.- FUNCION PRODUCTO.-

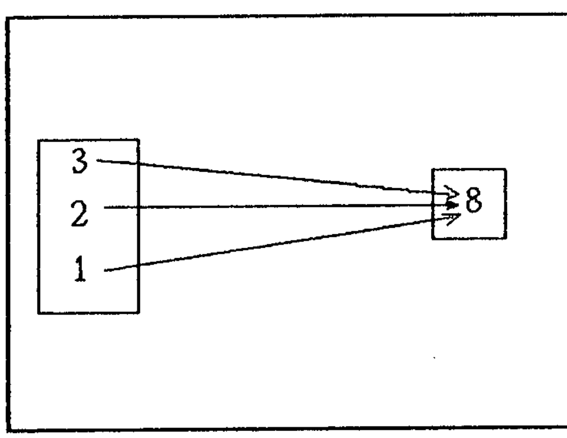
$k \circ g: A \longrightarrow C$
definida por $(k \circ g\ (x)) \equiv k(g(x))$

VALORE SUS CONOCIMIENTOS
No. 2

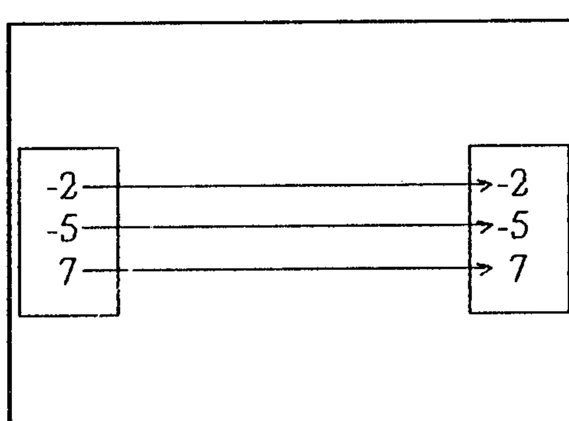
OBJETIVO 05	Diferenciar una función de una relación y calcular el dominio e imagen.

A. Ponga dentro del paréntesis una "R" o "F" si se trata de una relación o función respectivamente.

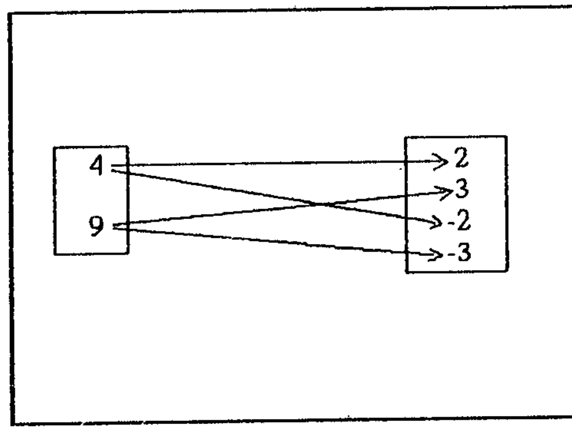
1. ( )



2. ( )



3. ( )



4. ( ) {(8,4),(10,5),(4,2),(2,1)}

5. ( ) {(6,3),(2,6),(1,2),(2,6)}

B. Coloque una (V) o una (F) según corresponda

6. ( ) Toda función es una relación.
7. ( ) La relación a < b es una función.
8. ( ) La siguiente fórmula f: y = f(x) denota una función.
9. ( ) Un mismo elemento de B puede ser imagen de uno o más elementos de A.
10. ( ) Una función constituye un caso particular de A x B.
11. ( ) $x \xrightarrow{f} f(x)$ se lee "por la función f, x se aplica sobre f(x).
12. ( ) f(x) corresponde a un elemento del dominio.
13. ( ) En el codominio hay elementos que no están relaciondos con elementos del primer conjunto (A).
14. ( ) Toda relación es una función.
15. ( ) Con x se representa una función.

C. Dados los siguientes conjuntos:

S = {2,3,4}, R = {6,11,18,20} y g = S ---> R definida por:
$g(x) = x^2 + 2$. Determine:

16. g(2) =
17. g(3) =
18. g(4) =
19. Los pares ordenados que determinan la función g.
20. El codominio de la función g.

D. Marque con una (x) lo correcto:

21. La alternativa que pertenece al recorrido de la función $f(x)=x/x-1$, es:

a. ( ) $R(f) = R - \{-1\}$
b. ( ) $R(f) = R - 1$
c. ( ) $R(f) = R - \{1\}$
d. ( ) Ninguno.

22. El literal que expresa el dominio y codominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4} \text{ es:}$$

		dom(f)	cod(f)
a.	( )	$R > 0$	$\{y/o < y < 1/4\}$
b.	( )	R	$\{y/o > y \geq 1/4\}$
c.	( )	R	$\{y/o < y \leq 1/4\}$
d.	( )	$R < 0$	$\{y/o > y > -1/4\}$

OBJETIVO 06	Representar una función en sus diferentes formas.

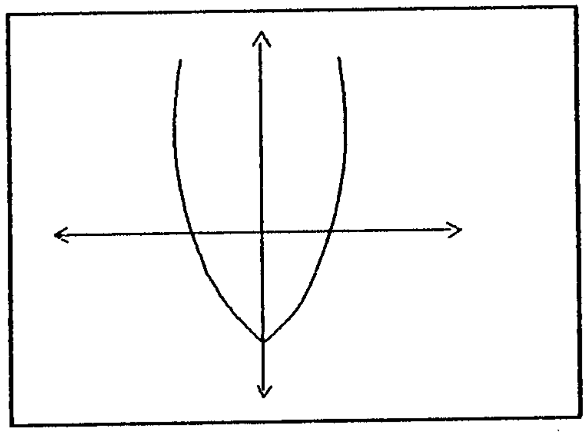
A. Escriba en el paréntesis correspondiente la letra que indica la forma como está definida cada una de las siguientes funciones:

A. Fórmula
B. Tabla
C. Gráfico
D. Descripción común.

23. ( ) "esposo de"
24. ( ) $y = x^2$
25. ( )

x	f(x)
1	2
2	4
3	6
4	8

26. (   )



27. (   ) El triple de un número más el siguiente.

28. (   ) $y = 5x - 6$

B. Represente gráficamente las siguientes funciones:

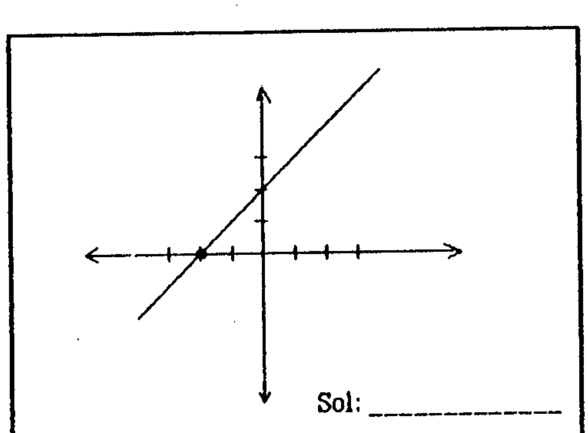
29. $f(x) = /x/$ de Z ---> Z

30. $h(x) = x^2 - 2x + 1$ de Z en Z

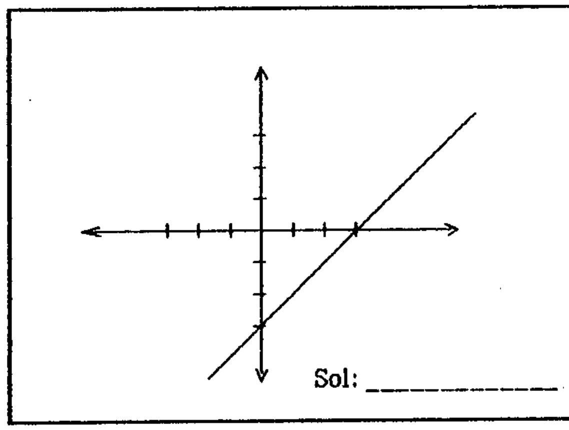
31. $g(x) = \dfrac{9x}{6x - 5}$ de R ---> R

C. Represente mediante fórmula matemática cada una de las funciones siguientes que están expresadas en forma gráfica.

32.



33.



OBJETIVO 07	Diferenciar una función de otra y determinar su inversa.

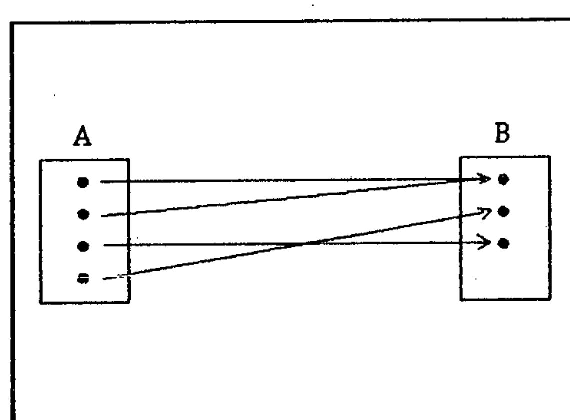
A. Escriba una (x) en el paréntesis que corresponda a la respuesta correcta:

34. Sea f: A ---> B. Se dice que f es inyectiva si:

a. ( ) a elementos iguales de A corresponden imágenes diferentes de B.
b. ( ) a elementos diferentes de A corresponden imágenes diferentes en B.
c. ( ) a elementos diferentes de A corresponden imagenes iguales en B.

35. El diagrama expresa una función:

a. ( )Inyectiva
b. ( )Sobreyectiva
c. ( )Biyectiva



36. Para determinar la inversa de una función se necesita que sea:

a. ( ) Inyectiva
b. ( ) Sobreyectiva

c. (   ) Biyectiva

37. La función inversa de $f(x) = \dfrac{5x - 1}{2}$ es:

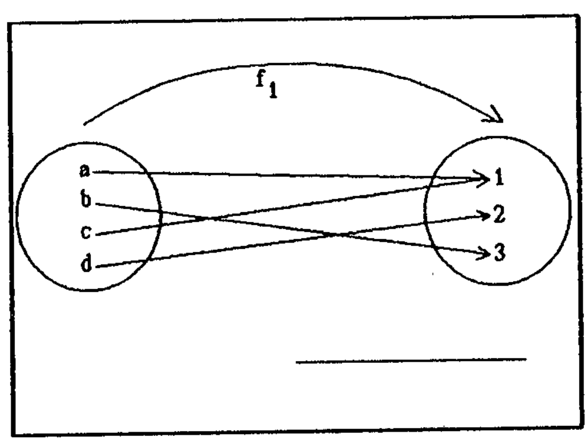
a. $\dfrac{2y - 1}{5}$ (   )

b. $\dfrac{5y + 1}{2}$ (   )

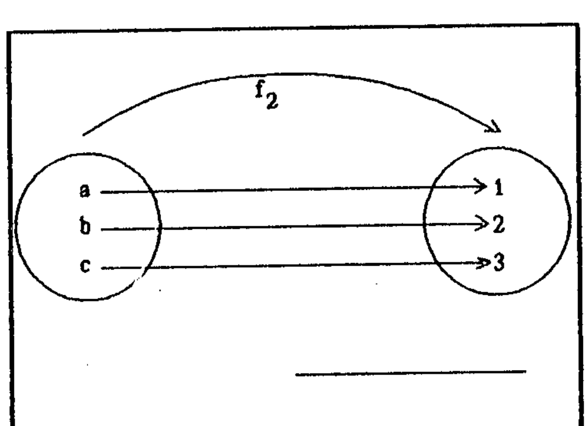
c. $\dfrac{2y + 1}{5}$ (   )

B. Frente a cada gráfico escriba su nombre correspondiente, atendiendo a su clasificación:

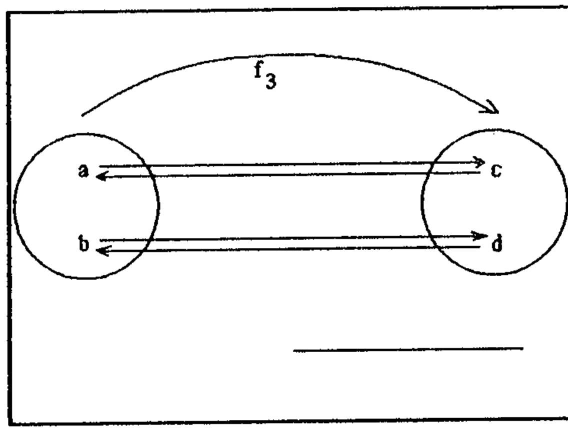
38.



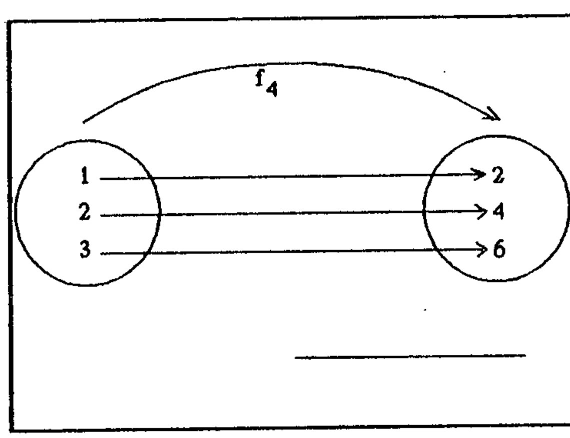
39.



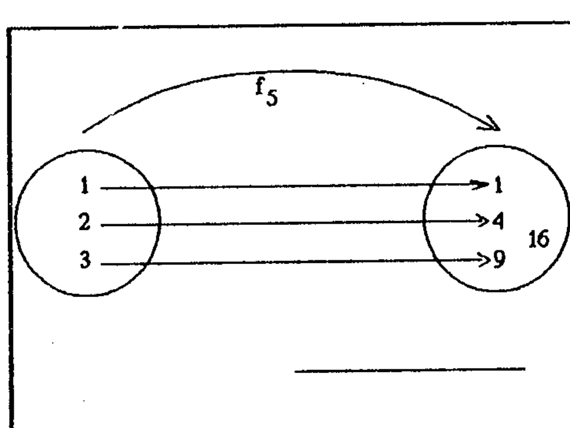
40.



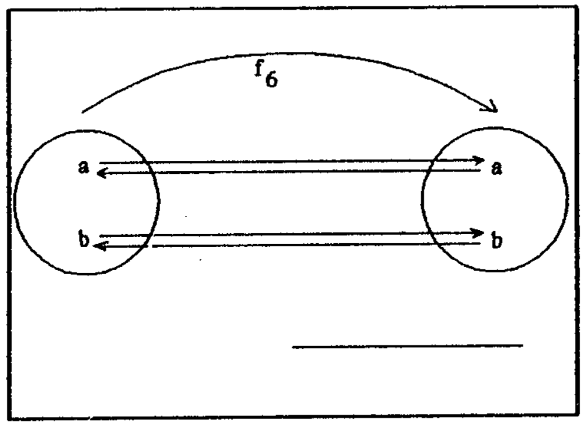
41.



42.



43.



C. Tache la (V) o la (F) según sea verdadero o falso cada uno de los siguientes enunciados:

44. V F Una función biyectiva siempre es sobreyectiva.
45. V F La inversa de una función no siempre es otra función.
46. V F Si $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
47. V F Una función es sobreyectiva sí y sólo si todos los elementos del codominio son imágenes de por lo menos un elemento del dominio.
48. V F Una función es biyectiva si es al mismo tiempo sobreyectiva e inversa.
49. V F La inversa de $f(x) = 3x + 10$ es $f^{-1}(y) = (y-10)/3$
50. V F La función inversa se determina de una función sobreyectiva.
51. V F En una función biyectiva las segundas componentes pueden repetirse.
52. V F $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A / f(a) = b$
53. V F Una función es inyectiva si al trazar paralelas al eje x, éstas cortan a la gráfica en un solo punto.

D. Resuelva los ejercicios siguientes:

54. Determine la inversa de $f(x) = (2x - 7)/3$
55. Trace la gráfica de f y f^{-1}. Utilice para ello el mismo sistema de coordenadas, si:
f: [-1,0,1] ---> [9,5,3]
$x \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 5$

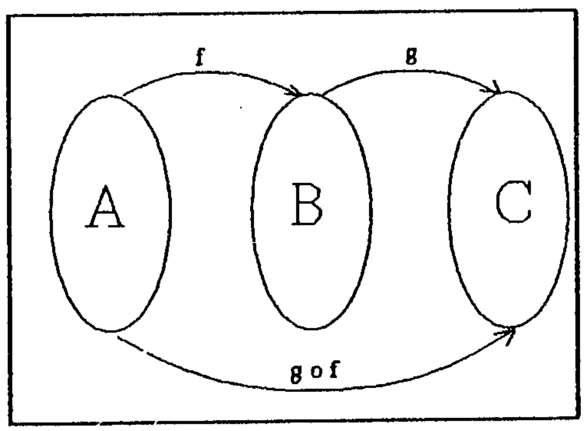
OBJETIVO 08	Determinar la función producto tanto analítica como gráficamente y demostrar sus propiedades.

A. Escriba en el paréntesis correspondiente las palabras: verdadero o falso, según los casos:

56. ( ) El símbolo que representa un producto de funciones es ▲

57. ( ) El recorrido o imagen de la primera función es subconjunto propio del dominio de la segunda función.

58. ( ) El producto f o g se representa gráficamente así:



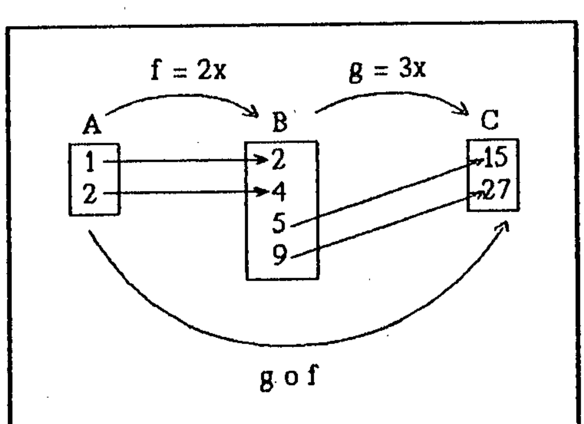
59. ( ) En el producto de funciones se aplica primero la función que está más cerca de y.

60. ( ) Las funciones que tienen su dominio e imagen vacía y que no es posible efectuar el producto, se denominan funciones vacías.

61. ( ) El producto de funciones es siempre conmutativo.

62. ( ) Si f y g son funciones inyectivas, también lo es su producto.

63. ( ) La siguiente representación gráfica corresponde a la función producto f o g.



64. ( ) La fórmula que representa a la función producto kog si: $k(x) = 2x-3y$; $g(x)=x^2 + 3x+1$ es $2x^2+6x-1$.

65. ( ) Simbólicamente fog $\neq$ gof

B. Resuelva los siguientes ejercicios con las siguientes funciones:

$f(x) = 3x + 1$
$g(x) = 4x$
$h(x) = x - 1$

Determine:

66. f o g =
67. g o f =
68. f o h =

69. Propuestas las siguientes funciones, demostrar la propiedad asociativa.

$f(x) = 2x + 4$
$g(x) = x$
$h(x) = x - 1$

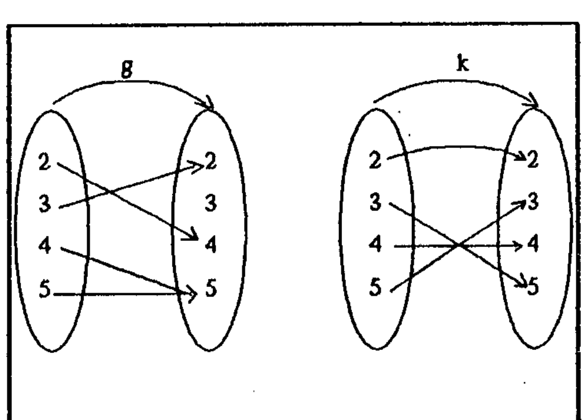
C. Sabiendo que:

$f(x) = 2x - 3$
$g(x) = x + 4$
$h(x) = 3x + 5$

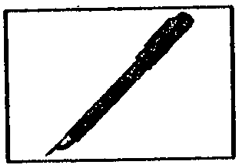
Determine:

70. f o f^{-1}
71. g o g^{-1}
72. f^{-1} o f
73. g^{-1} o g

D. Halle las imágenes de la función producto (k o g), fundamentándose en los gráficos de las funciones g y k.



74. k o g (2) =
75. k o g (3) =
76. k o g (4) =
77. k o g (5) =



CLAVE DE RESPUESTAS

Objetivo 05

A

1 (F), 2 (F), 3 (R), 4 (F), 5 (R)

B

6. (V)
7. (F) porque de elementos del dominio salen más de una flecha.
8. (V)
9. (V)
10. (V)
11. (V)
12. (F) Es falsa porque f(x) es un elemento del codominio.
13. (V)
14. (F) Porque toda función es una relación, pero no toda relación es función.
15. (F) Porque (x) es un elemento del dominio y una función se representa por f.

C

16. $g(2) = 6$
17. $g(3) = 11$
18. $g(4) = 18$
19. $\{(2,6),(3,11),(4,18)\}$
20. $Im\ (g) = \{6,11,18\}$

D

21. c(x)
22. c(x) Dom (f) = R; Im (f) = $\{y/o < y \leq 1/4\}$

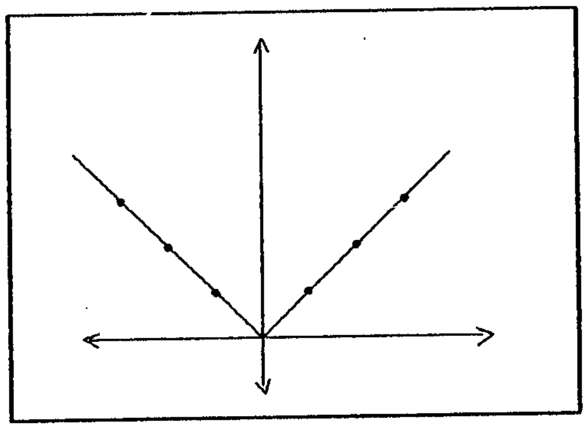
Objetivo 06

A

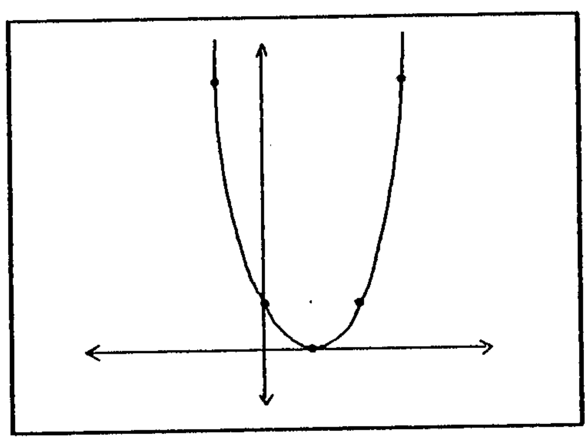
23. (D)
24. (A)
25. (B)
26. (C)
27. (D)
28. (A)

B

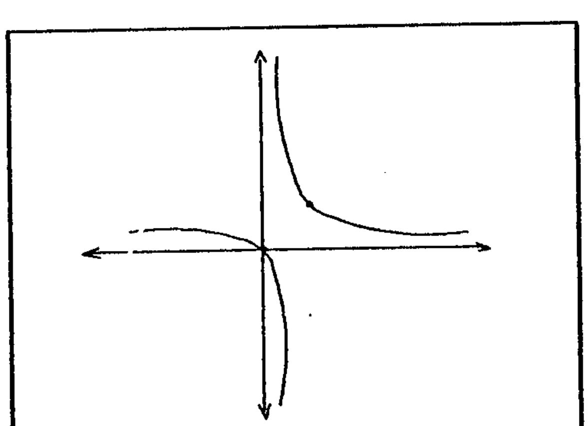
29.



30.



31.



C

32. $y = x + 2$
33. $y = x - 3$

Objetivo 07

A

34. b.(x) A elementos diferentes de A corresponden imágenes diferentes de B.
35. b.(x) Sobreyectiva
36. c.(x) Biyectiva
37. c.(x)

B

38. Sobreyectiva
39. Biyectiva-Inyectiva
40. Inversa
41. Inyectiva-Biyectiva
42. Sobreyectiva
43. Inversa

C

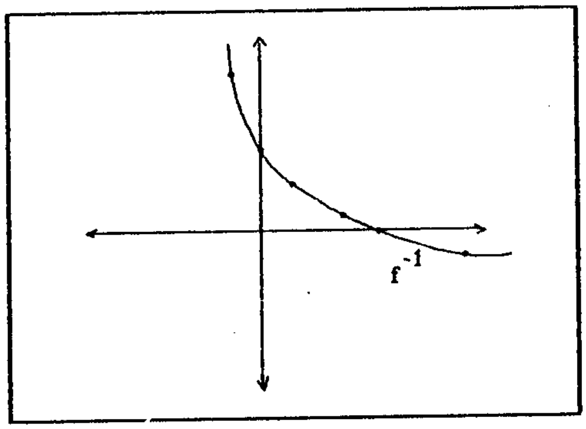
44. (V)
45. (V)
46. (V)
47. (V)
48. (F) Porque una función es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y sobreyectiva.
49. (V)
50. (F) Porque la función inversa se determina de una función biyectiva.
51. (F) Porque en una función biyectiva no se repiten las segundas componentes.
52. (V)
53. (V)

D

54. $f^{-1}(y) = \dfrac{3y + 7}{2}$

E

55.



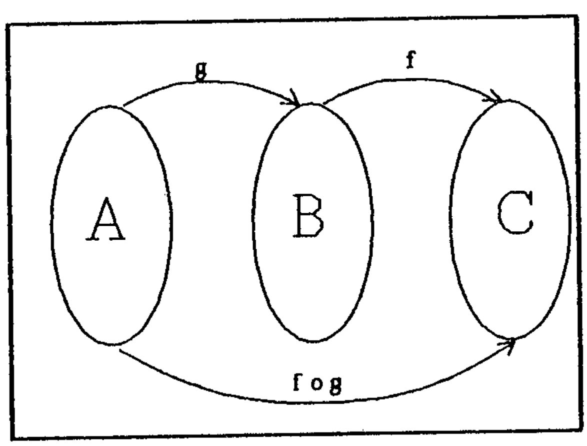
Objetivo 08

A

56. (F) Porque el símbolo que representa al producto de funciones es o

57. (V)

58. (F) El gráfico que representa el producto f o g es:



59. (F) En el producto de funciones se aplica primero la función que está más cerca de x.

60. (V)

61. (F) El producto de funciones no es siempre conmutativo.

62. (V)

63. (F) La representación gráfica no corresponde a una función producto porque el dominio de g no es subconjunto propio de la imagen f o

porque ningún elemento de A tiene su imagen en C.

64. (V)
65. (V)

<u>B</u>

66. $12x + 1$
67. $3x - 2$
68. $4x - 4$
69. $(f \circ g) \circ h = x + 1$
    $f \circ (g \circ h) = x + 1$

<u>C</u>

70. $f \circ f^{-1} = x$
71. $g \circ f^{-1} = x$
72. $f^{-1} \circ f = y$
73. $g^{-1} \circ g = y$
74. $k \circ g\ (2) = k(g(2)) = k(4) = 4$
75. $k \circ g\ (3) = k(g(3)) = k(2) = 2$
76. $k \circ g\ (4) = k(g(4)) = k(5) = 3$
77. $k \circ g\ (5) = k(g(5)) = k(5) = 3$

COMENTARIO

Al finalizar el estudio de los contenidos de las cuatro unidades que conforman el Módulo II, es necesario analizar los resultados tanto parciales como de módulo.

Después del estudio de cada unidad confiamos en que los objetivos planteados hayan alcanzado el punto de corte necesario para su aprobación, esto es el 70% en cada uno de ellos. Si por el contrario no alcanzó el porcentaje indicado debe usted reforzar sus conocimientos, procediendo a revisar nuevamente los temas correspondientes a los objetivos que no logró acreditar.

La autoevaluación propuesta al final del módulo II, comprende los aspectos más importantes y básicos para que le permitan continuar con el estudio de las siguientes unidades.

Le recordamos no pasar al siguiente módulo si no está seguro de los aprendizajes conseguidos, ya que el carácter sistemático de la asignatura le impide comprender los temas que se estudiarán en los módulos posteriores. Lo cual le permitirá realizar con éxito la prueba presencial.

BIBLIOGRAFIA

1. ALLENDOERFER, Carl B. y Cletus Oakley: 1976 Fundamentos de Matemáticas Universitarias Colombia., Edit. Graw-Hill, 633 p.

2. LEITHOLD, Louis: 1994 Matemáticas previas al cálculo, México, Edit. Harla., 898 p.

3. ESPINOZA, Alfredo C.: 1990 Matemáticas para 3er curso del ciclo básico. Guayaquil, 271 p.

4. LARA, Jorge y Jorge Arrobo: 1982 Análisis matemático., Quito., Edit. Universidad Central del Ecuador, 167p.

5. PROAÑO-VITERI, Galo Ramiro: 1982 Algebra Superior Moderna I., Quito., Edit. Provideti Editores, 278 p.

6. SAENZ, Rolando y otros: 1989 Matemáticas para el ciclo diversificado, segunda parte., Quito., 215 p.

7. SEYMOUR-LIPSCHUTZ, Ph.D.: 1964 Teoría de Conjuntos y temas afines., Colombia., Edit. Andes., 231 p.

8. SOBEL. Maza y Houston Barks: 1982 Algebra., México., Edit. MacGraw-Hill., 516 p.

9. VARSAVSKY, Oscar: 1973 Algebra para escuelas secundarias, tomo I., Argentina., Edit. Universitaria de Buenos Aires., 187p.

10. VALLE DE SARTENEJAS: 1974 Plano Cartesiano y funciones., Venezuela., 214 p.

11. WILLS, Darío y otros: 1976 Matemática moderna estructurada. Vol. 6., Colombia., Edit. Norma., 252 p.

MODULO 3 FUNCIONES REALES

INTRODUCCION DEL MODULO III

El estudio del módulo II fue realizado en forma amplia y completa en lo que se refiere a Funciones, formas de representar y su clasificación, para lo cual se presentó una serie de ejercicios tipo, una gran variedad de gráficos y tablas que permitirán asimilar su contenido sin dificultad, despertando el interés por conocer los temas del módulo III. En tal virtud y siendo la ciencia Matemática una escalera, cuyos peldaños debemos ir alcanzando en base a constante preparación y estudio, dedicaremos nuestra atención al conocimiento de Funciones Reales y Operaciones con Funciones.

El desarrollo del presente módulo pretende despertar en usted un mayor interés por su contenido. Toda explicación que se dará en este módulo será realizada con lujo de detalle de tal forma que el conocimiento sea de fácil comprensión y asimilación.

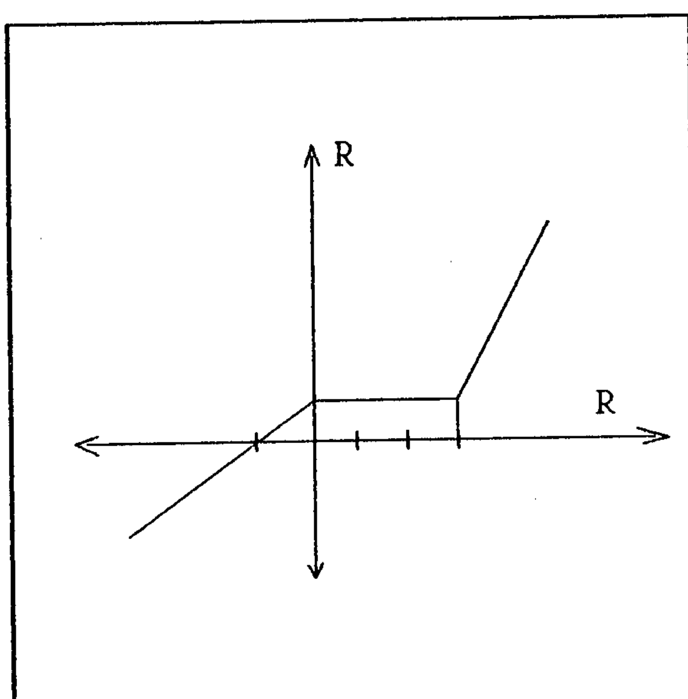
Todos los ejercicios propuestos serán resueltos con los diferentes pasos que deben guiar el desarrollo de los mismos, contemplando cierto grado de dificultad que suele presentarse de acuerdo al tema.

Labor suya será tratar de, una vez comprendida la parte teórica, realizar el mayor número de ejercicios que afiancen lo aprendido, tenga presente que trabajando con constancia los logros serán gratificantes.

OBJETIVO 03	Aplicar y analizar los conocimientos teóricos de las funciones en la demostración y operaciones con funciones reales.

UNIDADES	SEGMENTOS
9. Funciones Reales	9.1. Función Monótona creciente 9.2. Función Monótona decreciente 9.3. Función Constante 9.4. Función Lineal
10. Funciones Reales Particulares	10.1. Funciones Pares e Impares 10.2. Función Exponencial 10.3. Función Logarítmica
11. Operaciones con Funciones	11.1. Función Suma 11.2. Función Diferencia 11.3. Función Producto 11.4. Función Cociente

UNIDAD 9: FUNCIONES REALES	9.1. Función Monótona Creciente 9.2. Función Monótona Decreciente 9.3. Función Constante 9.4. Función Lineal



OBJETIVO 09	Establecer la diferencia entre función monótona creciente y decreciente.

9.1. FUNCION MONOTONA CRECIENTE

Una función real es monótona creciente si cumple con la siguiente condición:

$$\boxed{\forall\ x_1,\ x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$

y es estrictamente creciente si cumple con la condición:

$$\boxed{\forall\ x_1\ x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Sea $f: R^+ \Rightarrow R \cup \{0\}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Determinar si la función es creciente.

DESARROLLO:

Aplicando la condición tenemos:

a) $x_1 < x_2 \dashrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$1 < 2 \dashrightarrow f(x_1^2 + 1) \leq f(x_2^2 + 1)$

$1 < 2 \dashrightarrow (1^2 + 1) \leq (2^2 + 1)$

$1 < 2 \dashrightarrow 2 < 5$

b) Asignando valores diferentes a x_1 y x_2

$x_1 = 4;\ x_2 = 6$

$4 < 6 \dashrightarrow f(x_1^2 + 1) \leq f(x_2^2 + 1)$

$4 < 6 \dashrightarrow 17 < 37$

c) $x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$

$0 < 1 \dashrightarrow f(x^2 + 1) < f(x^2 + 1)$

$0 < 1 \Rightarrow 1 < 2$

$\therefore$ La Función propuesta es creciente de $[0, \alpha[$ Sol.

2.- Demuestre que la función $g(x) = x^3 - x^2 + x$ es creciente en los $R^+ \cup 0$.

DESARROLLO:

a) Si $x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$

$0 < 1 \Rightarrow f(x_1^3 - x_1^2 + x_1) \leq f(x_2^3 - x_2^2 + x_2)$

$0 < 1 \Rightarrow \qquad 0 < 1$

b) Si $x_1 = 3 \qquad x_2 = 4$

$3 < 4 \Rightarrow f(x_1^3 - x_1^2 + x_1) \leq f(x_2^3 - x_2^2 + x_2)$

$3 < 4 \Rightarrow \qquad 21 < 52$

c) Si $x_1 = 2 \qquad x_2 = 5$

$2 < 5 \Rightarrow f(x_1^3 - x_1^2 + x_1) \leq f(x_2^3 - x_2^2 + x_2)$

$2 < 5 \Rightarrow \qquad 6 < 95$

$\therefore$ La Función es creciente de $[0, \alpha[$ Sol.

Una función f es creciente, en un intervalo dado, cuando cumple con la siguiente condición:

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in (a,b)\ y\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

3.- Demuestre que $f(x) = 2x - 3$, es creciente en el intervalo $[1,3]$

DESARROLLO:

a) Si $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 2$

$1 < 2 \Rightarrow f(2x_1 - 3) \leq f(2x_2 - 3)$

$1 < 2 \Rightarrow \quad -1 < 1$

b) Si $x_1 = 2$ $\quad x_2 = 3$

$2 < 3 \Rightarrow f(2x_1 - 3) \leq f(2x_2 - 3)$

$2 < 3 \Rightarrow \quad 1 < 3$

c) Si $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 3$

$1 < 3 \Rightarrow f(2x_1 - 3) \leq f(2x_2 - 3)$

$1 < 3 \Rightarrow -1 < 3$

$\therefore$ La Función es creciente en el intervalo dado.
Sol.

4.- Analice si la siguiente función definida por:
$f(x) = \sqrt{(9-x)}$ es creciente en la R.

DESARROLLO:

a) Si $x_1 = 0$ $\quad x_2 = 1$

$0 < 1 \Rightarrow f(\sqrt{(9-x_1^2)}) \leq f(\sqrt{(9-x_2^2)})$

$0 < 1 \Rightarrow \quad 3 < \sqrt{18}$

b) Si $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 3$

$1 < 3 \Rightarrow f(\sqrt{(9-x_1^2)}) \leq f(\sqrt{(9-x_2^2)})$

$1 < 3 \Rightarrow \quad \sqrt{8} \nless 0$

c) Si $x_1 = -4$ $\quad x_2 = -2$

$-4 < -2 \Rightarrow f(\sqrt{(9-x_1^2)}) \leq f(\sqrt{(9-x_2^2)})$

$-4 < -2 \Rightarrow f(\sqrt{(9-16)}) \leq f(\sqrt{(9-4)}$

$-4 < -2 \Rightarrow f(\sqrt{-7}) \nless \sqrt{5}$

Como se observa en el desarrollo del ejercicio, la función es creciente únicamente en el intervalo [0,1] Sol.

5.- Demuestre que la función f definida por:

$$f(x) \begin{cases} x, & \text{si } x < 1 \\ x^2, & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8^{1/2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Es creciente en los R.

DESARROLLO:

En primer lugar determinamos los intervalos de cada parte de la función.

a) x si $x < 1 =]-\alpha, \ldots -4, -3, -2, -1, 0]$

x	0	-1	-2	-3
y	0	-1	-2	-3

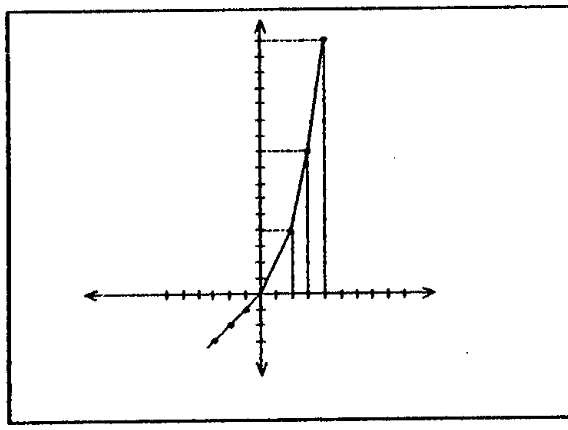
b) x^2 si $x < x \leq 4 = [1,2,3,4]$

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

c) $8^{1/2}$ si $x > 4 = [5,6,7,\ldots\alpha]$

x	5	6	7
y	$\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$

Luego trazamos y analizamos la gráfica correspondiente a la función.



$x_1 < x_2$ ---> $f(x_1) \leq f(x_2)$

$x_3 < x_4$ ---> $f(x_3) \leq f(x_4)$

$x_5 < x_6$ ---> $f(x_5) \leq f(x_6)$

$\therefore$ f(x) es creciente. Sol

6.- Demuestre que la función f definida por:

$$f(x) \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Es creciente en los reales.

DESARROLLO:

Primero determinamos los intervalos de cada parte de la función.

a) $2x - 3$ si $x < 0 =]-\alpha, \ldots -3, -2, -1]$

x	-1	-2	-3
y	-5	-7	-9

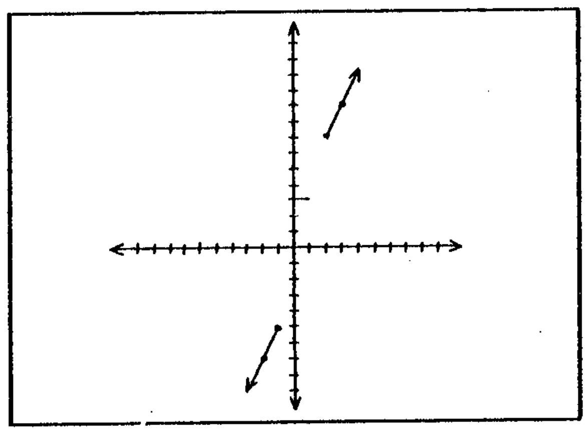
b) 3 si $0 \leq x \leq 1 = [0,1]$

x	0	1
y	3	3

c) $2x + 3$ si $x > 1 = [2,3,4,5,....\alpha[$

x	2	3	4
y	7	9	11

Luego trazamos y analizamos la gráfica de la función dada.



Otra forma de determinar si una función dada es creciente es utilizando la siguiente fórmula:

$$f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Si el resultado de esta operación es positivo (+), entonces es una función creciente.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Determine si las siguientes funciones de R--->R son crecientes:

1. $f(x) = x^3$
2. $g(x) = 2x$
3. $h(x) = 4x + 1$

DESARROLLO:

1. $f(x) = x^3$

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{x_1^3-x_2^2}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{(x_1-x_2)\,(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{(x_1-x_2)}$$

$$f=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$$

Si reemplazamos los números reales en la expresión obtenida, siempre resultará un valor positivo.

Por lo tanto la función dada es creciente. Sol.

2. $g(x) = 2x$

DESARROLLO:

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{2x_1-2x_2}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{2\,(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$f = 2 \quad \text{Sol.}$$

$\therefore$ Como el resultado de la operación es positivo, entonces la función es creciente. Sol.

3.- $h(x) = 4x + 1$

DESARROLLO:

$$f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f = \frac{4x_1 + 1 - 4x_2 - 1}{x_1 - x_2}$$

$$f = \frac{4x_1 - 4x_2}{x_1 - x_2}$$

$$f = \frac{4(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)}$$

$$f = \underline{4}$$

$\therefore$ Es una función creciente. Sol.

9.2. FUNCION MONOTONA DECRECIENTE

Una función real es decreciente si cumple con la siguiente condición:

$$\boxed{\forall\, x_1,\, x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Sea la función $X \dashrightarrow f(x) = -3x + 2$. Verifique si es decreciente.

DESARROLLO:

Aplicando la condición tenemos:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Si $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 2$

a) $1 < 2 \Rightarrow f(-3x_1 + 2) > f(-3x_2 + 2)$

$1 < 2 \Rightarrow \qquad -1 > -4$

Asignamos otros valores a x_1 y x_2

b) Si $x_1 = -3$ $\quad x_2 = -2$

$-3 < -2 \Rightarrow f(-3x_1 + 2) \geq f(-3x_2 + 2)$

$-3 < -2 \Rightarrow \qquad 11 > 8$

c) Si $x_1 = -2$ $\quad x_2 = 3$

$-2 < 3 \Rightarrow f(-3x_1 + 1) > f(-3x_2 + 2)$

$-2 < 3 \Rightarrow \qquad 8 > -7$

$\therefore$ La Función dada es decreciente. Sol.

2.- Dada $X \text{---}> h(x) = \dfrac{3 - 2x}{5}$. Determine si es decreciente

DESARROLLO:

$$x_1 < x \qquad f(x_1) \geq f(x_2)$$

a) Si $x_1 = 0$ $\quad x_2 = 1$

$$0 < 1 \Rightarrow \frac{f(3 - 2x_1)}{5} \geq \frac{f(3 - 2x_2)}{5}$$

$0 < 1 \Rightarrow \qquad 3/5 > 1/5$

b) Si $x_1 = -2$ $\quad x_2 = -1$

$$-2 < -1 \Rightarrow \frac{f(3 - 2x_1)}{5} \geq \frac{f(3 - 2x_2)}{5}$$

$-2 < -1 \Rightarrow \qquad 7/5 > 5/5$

$7/5 > 1$

c) Si $x_1 = -1$ $\quad x_2 = 4$

$$-1 < 4 \Rightarrow \frac{f(3 - 2x_1)}{5} \geq \frac{f(3 - 2x_2)}{5}$$

$-1 < 4 \Rightarrow \qquad 5/5 > -5/5$

$-1 < 4 \Rightarrow \qquad 1 > -1$

$\therefore$ La Función es decreciente. Sol.

3.- Dada la función $h(x) = \dfrac{x}{x - 7}$ Determine si es decreciente.

$(x \neq 7)$

DESARROLLO:

a) Si $x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$

$$0 < 1 \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_1 - 7}\right) \geq f\left(\frac{x_2}{x_2 - 7}\right)$$

$0 < 1 \Rightarrow \qquad 0 > -1/6$

b) Si $x_1 = -3 \qquad x_2 = -2$

$$-3 < -2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_1 - 7}\right) \geq f\left(\frac{x_2}{x_2 - 7}\right)$$

$-3 < -2 \Rightarrow 3/10 \qquad > 2/9$

$0,33 \qquad > 0,23$

c) Si $x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$

$$-1 < 2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1}{x_1 - 7}\right) > f\left(\frac{x_2}{x_2 - 7}\right)$$

$-1 < 2 \Rightarrow \qquad 1/8 > -2/5$

$\therefore$ Es una función decreciente. Sol.

Una función f es decreciente en un intervalo dado cuando cumple con la siguiente condición:

$$\boxed{\forall\ x_1,\ x_2 \in (a,b) \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Demuestre que la función $h(x) = 1/x$ es decreciente en el intervalo [1,2,3,4]

DESARROLLO

a) Si $x_1 = 1$ $\qquad$ $x_2 = 4$

$$1 < 4 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x_1}\right) \geq f\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

$$1 < 4 \Rightarrow 1/1 > 1/4$$

$$1 > 0{,}25$$

b) Si $x_1 = 2$ $\qquad$ $x_2 = 3$

$$2 < 3 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x_1}\right) \geq f\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

$$2 < 3 \Rightarrow 1/2 > 1/3$$

$$0{,}5 > 0{,}3$$

c) Si $x_1 = 3$ $\qquad$ $x_2 = 4$

$$3 < 4 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x_1}\right) \geq f\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

$$3 < 4 \Rightarrow 1/3 > 1/4$$

$$0{,}3 > 0{,}25$$

$\therefore$ La función dada es decreciente. Sol.

2.- Demuestre que la función $g(x)$ definida por:

$$g(x) \begin{cases} 2 - x, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - 2x, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Es decreciente.

DESARROLLO:

Primero determinamos los intervalos de cada parte de la función.

a) $2 - x$ Si $x < 0 =]-\alpha, \ldots -3,-2,-1]$

x	-1	-2	-3
y	3	4	5

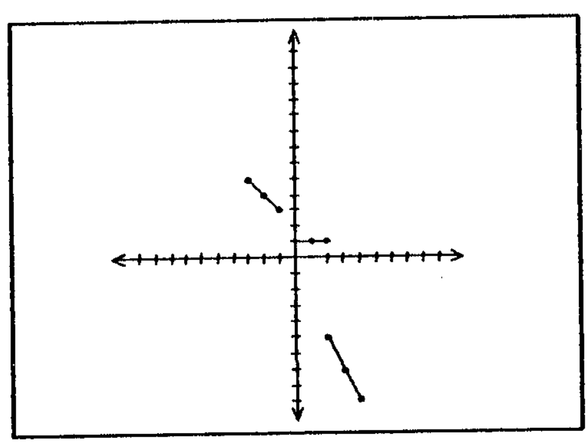
b) 1 Si $0 \leq x \leq 2$ = [0,1,2]

x	0	1	2
y	1	1	1

c) $1 - 2x$ Si $x > 2$ = [3,4,5,....α[

x	3	4	5
y	-5	-7	-9

Luego trazamos y analizamos el gráfico de la función dada.



3.- Verifique que la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ es decreciente en el intervalo [1,3]

DESARROLLO:

a) $x_1 = 1$ $x_2 = 3$

$1 < 3 \Rightarrow f(x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1) \geq f(x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2)$

$1 < 3 \Rightarrow$ $4 \geq 0$

b) $x_1 = 1$ $x_2 = 2$

$1 < 2 \Rightarrow f(x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1) \geq f(x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2)$

$1 < 2 \Rightarrow$ $3 > 2$

c) $x_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 3$

$2 < 3 \Rightarrow f(x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1) > f(x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2)$

$2 < 3 \Rightarrow \qquad\qquad 2 > 0$

$\therefore$ Es una función decreciente. Sol.

Otra forma de determinar si una función dada es decreciente es utilizando la siguiente fórmula:

$$f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Si el resultado de esta operación es negativo (-), entonces es una función decreciente.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Determine si las siguientes funciones de R en R son decrecientes.

1. $h(x) = -3x + 4$

2. $g(x) = -4x + 2$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x - 7}$

DESARROLLO:

1.- $h(x) = -3x + 4$

$$f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f = \frac{-3x_1 + 4 - (-3x_2 + 4)}{x_1 - x_2}$$

$$f = \frac{-3x_1 + 4 + 3x_2 - 4}{x_1 - x_2}$$

$$f=\frac{-3x_1+3x_2}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{-3\,(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$f = -3$$

Como el resultado de la operación es negativo, entonces la función es decreciente. Sol.

2.- $g(x) = -4x + 2$

DESARROLLO:

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{-4x_1+2-(-4x_2+2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{-4x_1+2+4x_2-2}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{-4x_1+4x_2}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{-4(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$f = -4$$

$\therefore$ La función es decreciente. Sol.

3.- $f(x) = \dfrac{x}{x - 7}$

DESARROLLO:

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\dfrac{x_1}{x_1-7}-\dfrac{x_2}{x_2-7}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\dfrac{x_1(x_2-7)-x_2(x_1-7)}{(x_1-7)(x_2-7)}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\dfrac{x_1x_2-7x_1-x_1x_2+7x_2}{(x_1-7)(x_2-7)}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\dfrac{-7x_1+7x_2}{(x_1-7)(x_2-7)}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{-7x_1+7x_2}{(x_1-7)(x_2-7)(x_1-x_2)}$$

$$f=\frac{-7(x_1-x_2)}{(x_1-7)(x_2-7)(x_1-x_2)}$$

$$f=\frac{-7}{(x_1-7)(x_2-7)}$$

$\therefore$ es decreciente. Sol.

Las funciones que en parte son crecientes y en otras decrecientes se llaman monótonas a trozos

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea f:R--->R definida por $f(x) = 2x^2 - 5$. Determine si la función es monótona a trozos.

DESARROLLO:

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{(2x_1^2-5)-(2x_2^2-5)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{2x_1^2-5-2x_2^2+5}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{2x_1^2-2x_2^2}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{2\,(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{2\,(x_1-x_2)\,(x_1+x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$f=2\,(x_1+x_2)$$

Análisis

Si tomamos dos valores positivos y reemplazamos en la expresión obtenida nos da como resultado un valor positivo por lo cual la función es creciente en R^+.

Si tomamos dos valores negativos y reemplazamos en la expresión obtenida nos da como resultado un valor negativo, por lo tanto la función decreciente en R^-. Por lo cual la función $f(x) = 2x^2 - 5$ es monótona a trozos.

2.- Verificar si la función $f(x) = 1/x^2$ es monótona a trozos en R.

DESARROLLO:

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2(x_1-x_2)}$$

$$f=-\frac{(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2x_2^2(x_1-x_2)}$$

$$f=-\frac{(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}$$

Análisis

Si $x_1 \wedge x_2 \in R^+ \Rightarrow f < 0$, la función es decreciente. Sol.

Si $x_1 \wedge x_2 \in R^- \Rightarrow f > 0$, la función es creciente.

$\therefore$ la función $f(x) = 1/x^2$ es monótona a trozos. Sol.

3.- Verifique si la función $h(x) = 3x^2/5$ es monótona a trozos en los reales.

DESARROLLO:

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\frac{3x_1^2}{5}-\frac{3x_2^2}{5}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{\frac{3x_1^2-3x_2^2}{5}}{x_1-x_2}$$

$$f=\frac{3\,(x_1^2-x_2^2)}{5\,(x_1-x_2)}$$

$$f=\frac{3\,(x_1+x_2)\,(x_1-x_2)}{5\,(x_1-x_2)}$$

$$f=\frac{3}{5}\,(x_1+x_2)$$

Si $x_1 \wedge x_2 \in R^+ \Rightarrow f > 0$ la función es creciente.

Si $x_1 \wedge x_2 \in R^- \Rightarrow f < 0$ la función es decreciente.

$\therefore$ la función es monótona a trozos. Sol

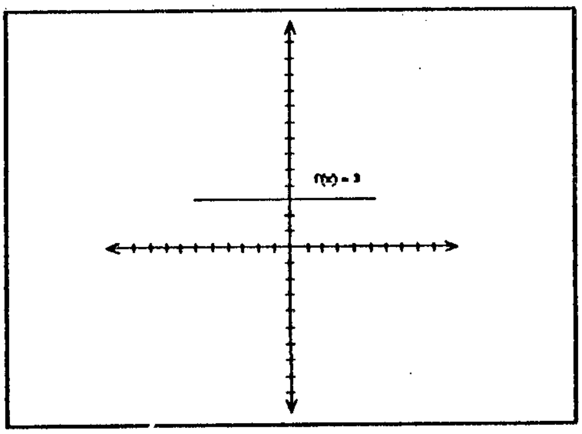
9.3. FUNCION CONSTANTE

En base al siguiente ejemplo, definiremos la función constante.

Sea f: A--->B definida por $f(x) = 3$; x, $y/f(x) \in R$

DESARROLLO:

Representamos la función mediante diagramas de Venn y plano cartesiano, así:



Observamos que todos los elementos de x del dominio A tienen la misma imagen 3.

Si la representamos mediante pares ordenados vemos que tienen la misma segunda componente, así: {(2,3),(3,3),(0,3),(-2,3),(-3,3)}.

En el plano cartesiano vemos que la función está representada por una recta paralela al eje x.

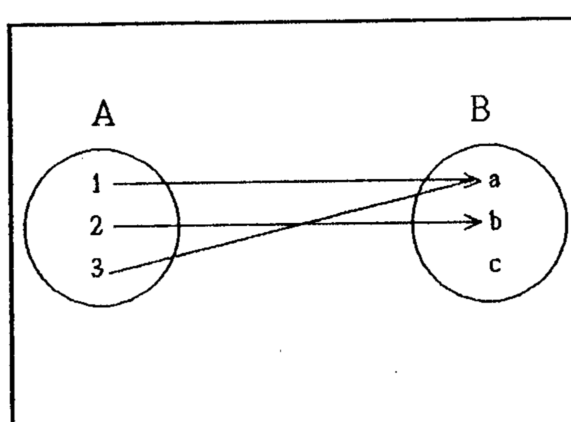
POR LO TANTO

Una función f de A--->B se llama constante si a cada elemento de A, a ∈ A se le asigna el mismo elemento de B, b ∈ B.

Simbólicamente:
$f(x) = K \text{--->} K \neq 0$ constante.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

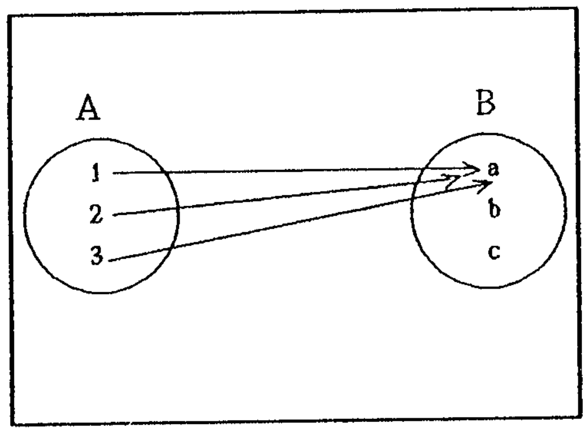
1.- Dada la función f definida por el diagrama, que se indica. Determine si es constante.



SOLUCION:

Al observar el gráfico vemos que el dominio de imágenes está formado por dos elementos (a,b), en consecuencia la gráfica dada no corresponde a una función constante.

2.- Sea la función h definida por el diagrama. Verifique si es constante.



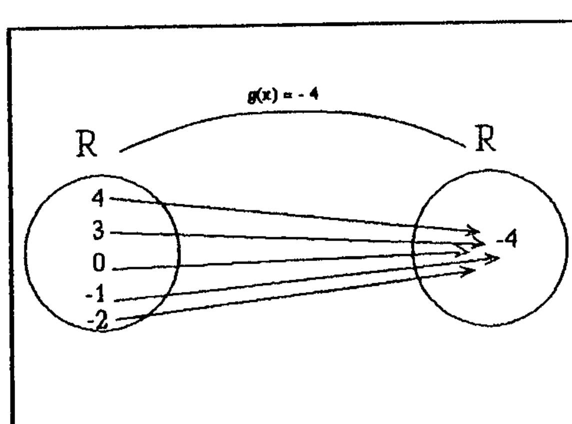
SOLUCION:

En el gráfico vemos que el dominio de imágenes está formado por un solo elemento (a), por lo tanto h es constante.

3.- Dada la función g: R---->R definida por la fórmula g(x) = -4. Represente en diagrama de Venn, pares ordenados y plano cartesiano.

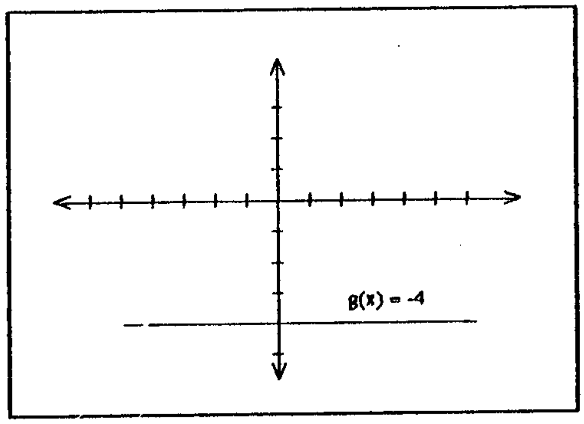
DESARROLLO:

a). Diagrama de Venn:



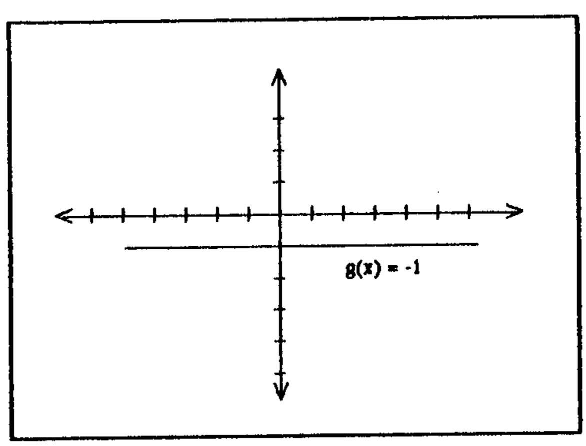
b). Pares ordenados:

g(x) = {(4,-4),(3,-4),(0,-4),(-1,-4),(-2,-4)} c). Plano Cartesiano:



∴ es una función constante. Sol.

4.- Dada g: R---->R y la función constante definida por g(x) = -1 para todo x ∈ R. Su gráfico es una recta paralela al eje x, como se indica a continuación.



9.3.1. FUNCION CONSTANTE POR INTERVALOS

(García L. Balbino y otros, 1982)

Se dice que una <u>función es constente en un intervalo</u> [a,b], si para cualquier valor x ∈ [a,b], se tiene f(x) = K (K=constante).

Si el conjunto inicial de una función, x => f(x), admite una partición en intervalos, tal que f(x) sea constante en cada uno de ellos, entonces f(x) se llama <u>Función Escalonada</u>.

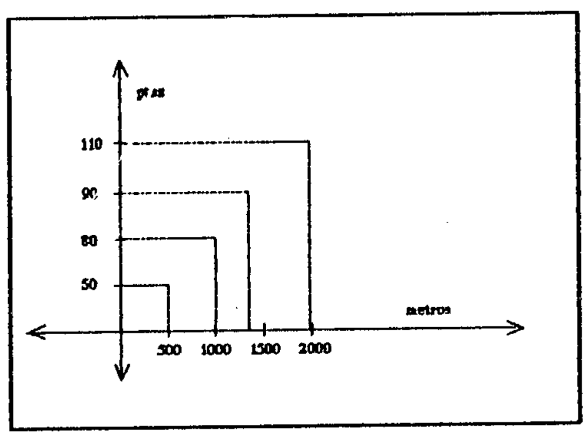
EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Sea x el camino recorrido por un camión y f(x) la tasa que hay que pagar por el transporte de una mercancía. Entonces f(x) es una función constante por intervalos.

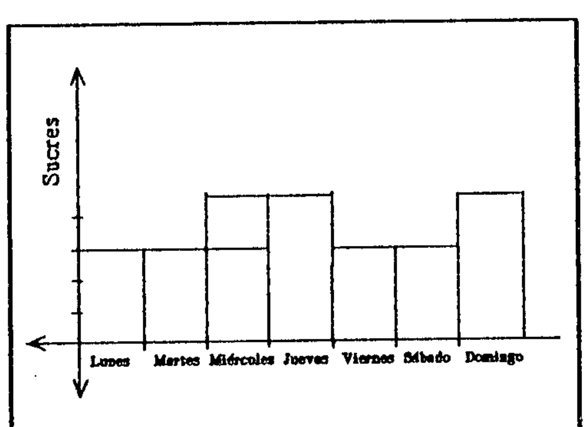
En efecto si se supone:

que $0 < x \leq 500$ m, es $f(x) = 50$ ptas.
que $500 < x \leq 1000$ m, es $f(x) = 80$ ptas.
que $1000 < x \leq 1300$ m, es $f(x) = 90$ ptas.
que $1300 < x \leq 2000$ m, es $f(x) = 110$ ptas.

La gráfica es la siguiente:

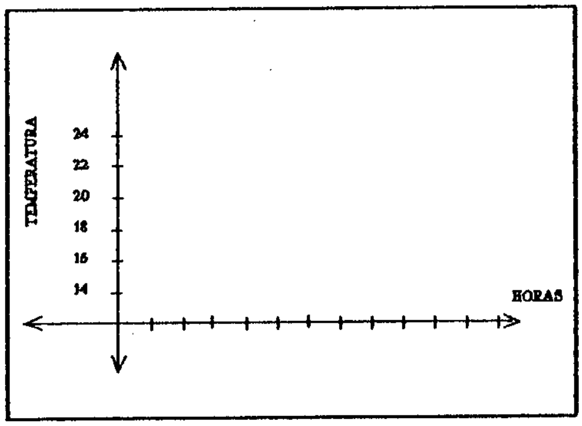


2.- El costo del transporte en Ecuador es de \$ 250 todos los días y de \$ 400 los feriados y domingos. Realizar la representación gráfica de la función de Lunes a Domingo inclusive, si además el jueves fue de fiesta.



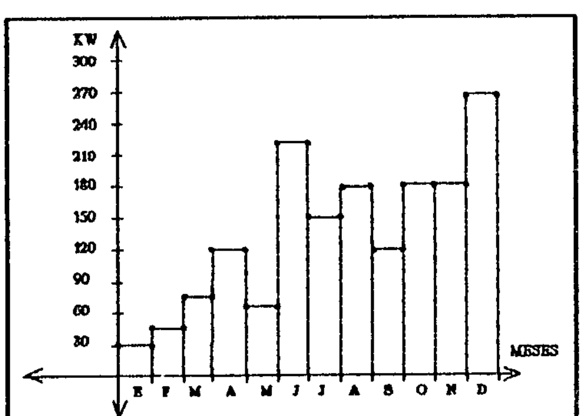
3.- Dibujar la gráfica de la temperatura durante 12 horas sabiendo que:

1a. T = 14°C ;	2a. T = 14°C ;	3a. T = 15°C.
4a. T = 16°C ;	5a. T = 18°C ;	6a. T = 22°C.
7a. T = 24°C ;	8a. T = 24°C ;	9a. T = 24°C.
10a. T = 23°C ;	11a. T = 20°C ;	12a. T = 19°C.



4.- Dibujar la gráfica del gasto de luz durante un año, sabiendo que:

Enero	30 Kw	Febrero	50 Kw	Marzo	80 Kw
Abril	120 Kw	Mayo	60 Kw	Junio	210 Kw
Julio	150 Kw	Agosto	180 Kw	Septiembre	120 Kw
Octubre	180 Kw	Noviembre	180 Kw	Diciembre	250 Kw



9.4. FUNCION LINEAL

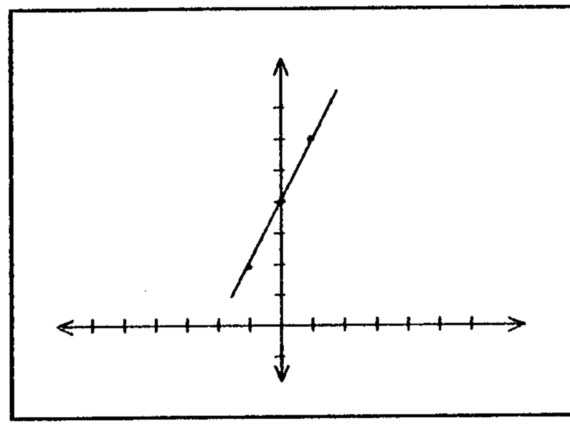
Ejemplo: Representemos gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = 2x + 4$$

DESARROLLO:

Para obtener el gráfico de una función lineal basta con representar dos puntos cualesquiera y unirlos mediante una línea recta.

x	0	1	-1
y	4	6	2



Del gráfico anterior podemos decir que se represente una función lineal, ésta será una línea recta.

POR LO TANTO

Una función lineal está definida por $f(x) = ax + b$, para todo $x \in R$ donde a y b son constantes y $a \neq 0$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Representar gráficamente las siguientes funciones:

1. $f(x) = x + 4$

2. $h(x) = -2x + 4$

3. $g(x) = 8 - 3x$

4. $f(x) = -2x$

5. $f(x) = x$

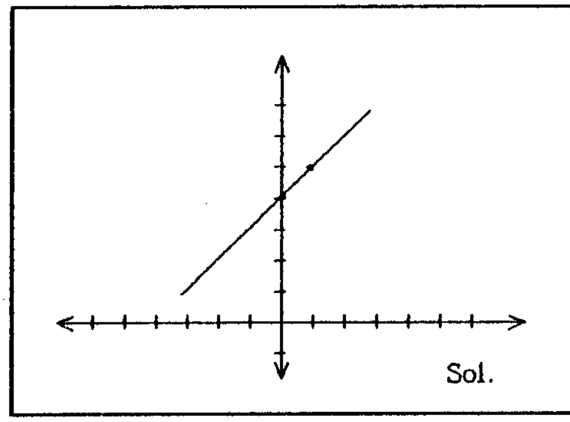
6. $2x + y = 5$

7. $4x - y = 8$

DESARROLLO:

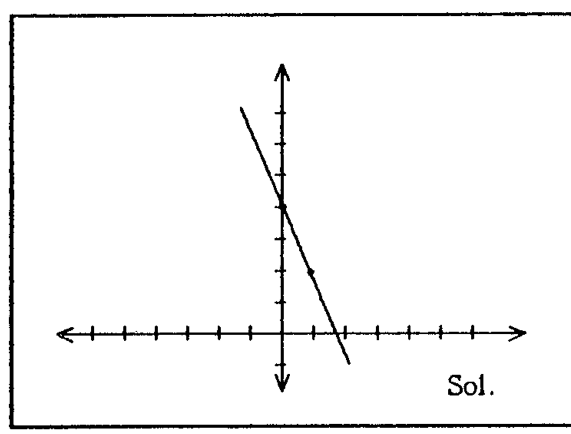
1. $f(x) = x + 4$

x	0	1
y	4	5



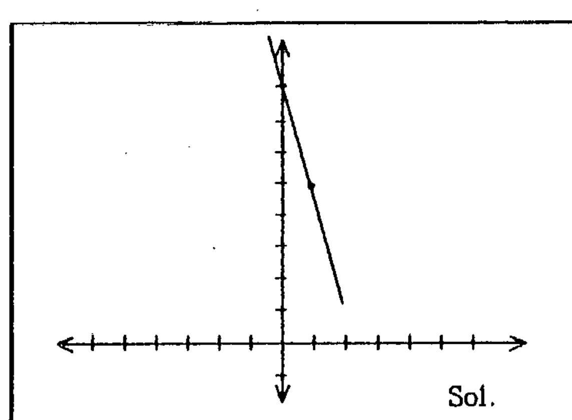
2. $h(x) = -2x + 4$

x	0	1
y	4	2



3. $g(x) = 8 - 3x$

x	0	1
y	8	5

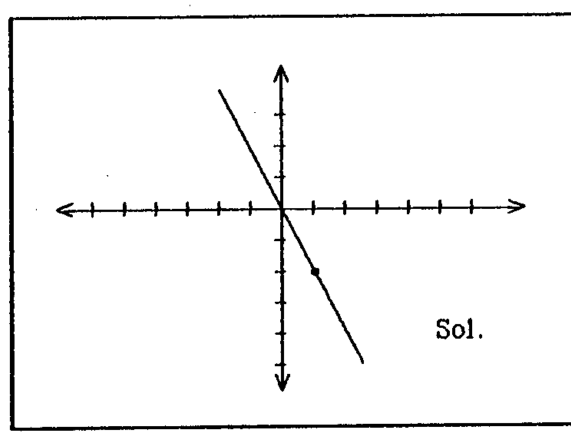


Al observar los gráficos vemos que la línea recta que representa a las funciones dadas no pasa por el origen del sistema de coordenadas, adoptando la forma:

$$\boxed{y = ax + b}$$

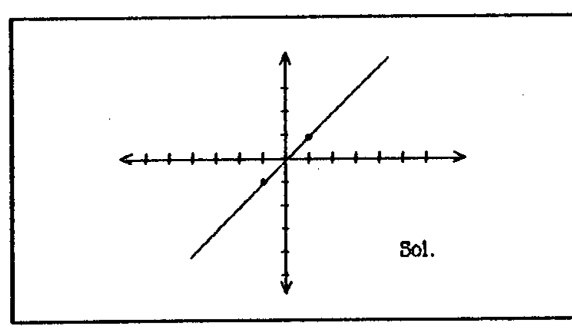
4. $f(x) = -2x$

x	0	1
y	0	-2



5. $f(x) = x$

x	0	1	-1
y	0	1	-1



Al observar los dos últimos gráficos vemos que la línea recta pasa por el origen, adoptando la forma:

$$\boxed{y = ax}$$

6. $2x + y = 5$

DESARROLLO:

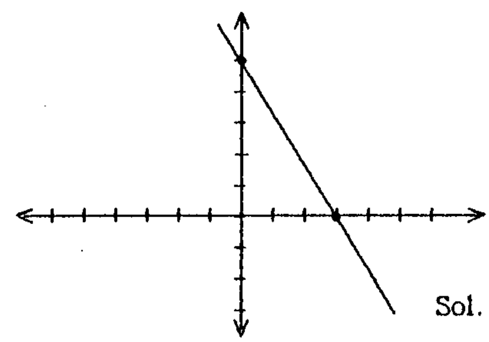
En la igualdad dada observamos que y es la variable dependiente por lo que no está despejada, en estos casos hay que despejar dicha variable.

$$2x + y = 5$$

$$y = 5 - 2x$$

Luego asignamos valores a x con el fin de encontrar los correspondientes de y, tomando en cuenta que dos puntos son suficientes para trazar una recta.

x	0	1
y	5	3



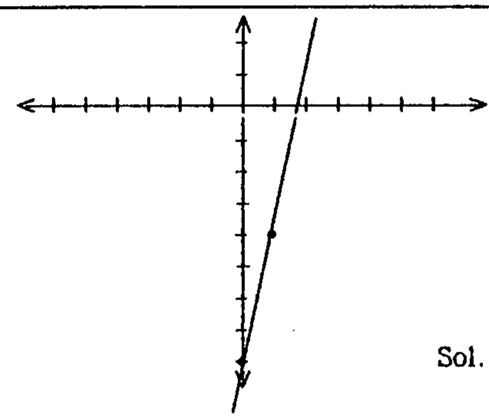
Sol.

7. $4x - y = 8$

DESARROLLO:

x	0	1
y	-8	-4

$$4x - y = 8$$
$$-y = 8 - 4x$$
$$y = 4x - 8$$



Sol.

ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 9

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos:

1. Determine mediante definición y fórmula si las siguientes funciones son crecientes:

   a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 1}$

   b) $h(x) = -x^2$

   c) $g(x) = -3x + 4$

   d) $f(x) = x^2 - 3x + 6$

   e) $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ si $x \neq 1$

2. Determine mediante definición y fórmula si las siguientes funciones son decrecientes:

   a) $f(x) = -3/4 \sqrt{x^2 - 16}$

   b) $h(x) = \dfrac{3 - 2x}{5}$

   c) $g(x) = -5x + 7$

   d) $f(x) = 1/x^4$

   e) $h(x) = x^2 - 2x + 7$

3. Compruebe si las siguientes funciones son monótonas a trozos.

   a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{5} + x$

   b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

   c) $h(x) = x - 1$

   d) $g(x) = -x + 4$

e) $h(x) = x + \frac{1}{x}$

4. Dadas las siguientes funciones de R ---> R represente en diagramas de Venn, pares ordenados y plano cartesiano.

   a) $f(x) = 5$

   b) $g(x) = -5/3$

   c) $h(x) = 3/2$

   d) $f(x) = -2$

   e) $h(x) = 10/3$

5. Dibujar las gráficas de las siguientes funciones reales.

   a) $f(x) = [x + 1]$, si su dominio $[2,-2]$

   b) $f(x) = [x]$, si su dominio $[-3,3]$

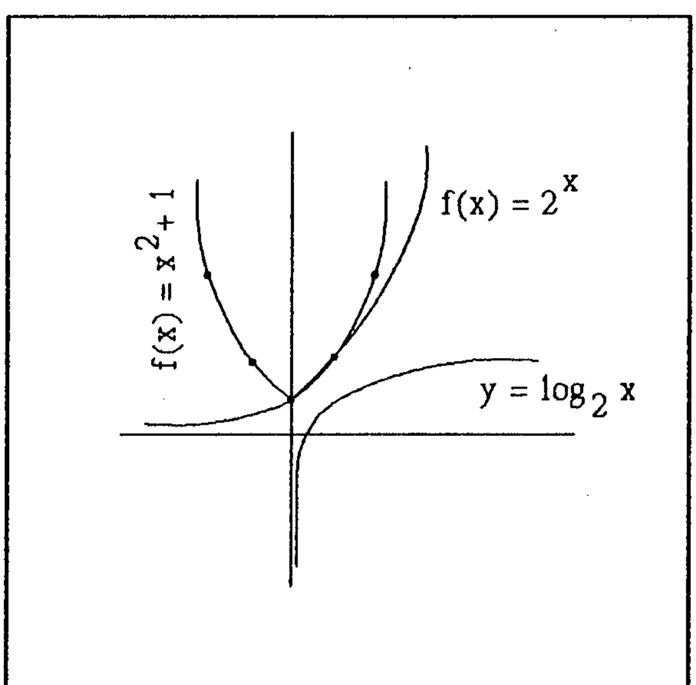
6. Sea x el número de impulsos de una línea telefónica y f(x) su valor en sucres. En Ecuador el valor se rige según el número de impulsos y de acuerdo a los siguientes intervalos:

$0 < x \leq 50$	$f(x) = 1000$
$50 < x \leq 100$	$f(x) = 2000$
$100 < x \leq 150$	$f(x) = 3000$
$150 < x \leq 200$	$f(x) = 4000$
$200 < x \leq 250$	$f(x) = 5000$
$250 < x \leq 300$	$f(x) = 6000$

7. Representar gráficamente las funciones siguientes:

   1. $f(x) = 3x$
   2. $g(x) = x - 4$
   3. $h(x) = 4x + 5$
   4. $g(x) = -2x - 4$
   5. $f(x) = 5x$
   6. $g(x) = 2x$
   7. $5x - y = 2$
   8. $y + 5 = x$
   9. $2x = 3y$

UNIDAD 10:	FUNCIONES REALES PARTICULARES	10.1.	Funciones Pares e Impares
		10.2.	Función Exponencial
		10.3.	Función Logarítmica



OBJETIVO 10	Determinar si una función real es par, impar, exponencial o logarítmica en sus diferentes formas.

10.1. FUNCIONES PARES E IMPARES

(Lara, jorge y otros 1982)

DEFINICION:

Sea f: A--->R una función real tal que $x \in A$ entonces $-x \in A$. Se dice que: f es una <u>función par</u> sí y sólo sí:

$$\boxed{\forall\ x \in A,\ f(x) = f(-x)}$$

f es una función impar sí y sólo sí:

$$\boxed{\forall\ x \in A,\ f(-x) = -\ f(x)}$$

Nota.- Una función f puede ser ni par ni impar.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Dada la función $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 7$, Demuestre si es par.

DESARROLLO:

Recordemos que la condición que una función debe cumplir para ser par es:

$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$

Luego reemplazamos la función dada en la representación simbólica.

$f(x) = f(-x)$

$f(3x^4 - 4x^2 + 7) = f\ [3(-x)^4 - 4(-x)^2 + 7]$

$3x^4 - 4x^2 + 7 = 3x^4 - 4x^2 + 7$

$\therefore$ f es una función par. Sol.

Luego se asigna valores arbitrarios a la variable X y comprobamos que se cumple la condición.

$$f(2) = f(-2)$$

$f(3x^4 - 4x^2 + 7) = f3(-x)^4 - 4(-x)^2 + 7$

$3(2)^4 - 4(2)^2 + 7 = 3(-2)^4 - 4(-2)^2 + 7$

$48 - 16 + 7 = 48 - 16 + 7$

$39 = 39$ L.Q.Q.D.

2. Dada la función $f(x) = x^3 + 2x$. Demuestre si es impar.

DESARROLLO:

Recordemos que la condición que una función debe cumplir para ser impar es:

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Luego reemplazamos la función dada en la representación simbólica.

$$f(-x) = -f(x)$$

$$(-x)^3 + 2(-x) = -(x^3 + 2x)$$

$$-x^3 - 2x = -x^3 - 2x$$

$\therefore$ f es una función impar. Sol.

Luego asignamos valores arbitrarios a la variable X y comprobamos que se cumple la condición.

$$f(-1) = -f(1)$$

$$(-1)^3 + 2(-1) = -[(1)^3 + 2(1)]$$

$$-1 - 2 = -(1 + 2)$$

$$-3 = -3 \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

De las funciones siguientes demuestre cuáles son pares e impares:

3. $f(x) = x^2 + 1$

4. $f(x) = x^5 - x^3 - 3$

5. $f(x) = x^2 + x - 1$

6. $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{x + 2x^3}$

7. $f(x) = 5x^3 - 7x$

8. $f(x) = x^6 - 1$

9. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

10. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 1$

DESARROLLO:

3.- $f(x) = x^2 + 1$

a) Determinemos mediante la definición si la función dada es par.

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x^2 + 1) = f(-x)^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 1$$

$$f(2) = f(-2)$$

$$2^2 + 1 = (-2)^2 + 1$$

$$5 = 5 \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

$\therefore$ la función es par. Sol.

b) Comprobemos si es impar

$$f(-x) = -f(x)$$

$$(-x)^2 + 1 = -(x^2 + 1)$$

$$x^2 + 1 \neq -x^2 - 1$$

Por consiguiente la función no es impar, ya que:

$$f(-x) \neq - f(x)$$

4.- $f(x) = x^5 - x^3 - 3$

a) La función f es par si:

$f(x) = f(-x)$

$f(x^5 - x^3 - 3) = f(-x)^5 - (-x)^3 - 3$

$x^5 - x^3 - 3 \neq -x^5 + x^3 - 3$ sol.

$f(x) = f(-x)$

$f(2) \neq f(-2)$

$[(2)^5 - (2)^3 - 3] = (-2)^5 - (-2)^3 - 3$

$32 - 8 - 3 = -32 + 8 - 3$

$21 \neq -27$ L.Q.Q.D.

$\therefore$ no es par. Sol.

b) La función f es impar si:

$f(-x) = - f(x)$

$f(x) = x^5 - x^3 - 3$

$(-x)^5 - (-x)^3 - 3 = -(x^5 - x^3 - 3)$

$-x^5 + x^3 - 3 \neq -x^5 + x^3 + 3$ Sol.

$\therefore$ la función dada no es impar, porque $f(-x) \neq - f(x)$

5.- $f(x) = x^2 + x - 1$

a) La función es par si:

$f(x) = f(-x)$

$f(x^2 + x - 1) = f[(-x)^2 + (-x) - 1]$

$x^2 + x - 1 \neq x^2 - x - 1$

$\therefore$ f no es par, porque $f(x) \neq f(-x)$ Sol.

b) La función es impar si:

$f(-x) = - f(x)$

$f(x) = x^2 + x - 1$

$(-x)^2 + (-x) - 1 = -(x^2 + x - 1)$

$x^2 - x - 1 \neq -x^2 - x - 1$

$\therefore$ La función no es impar, porque $f(-x) \neq -f(x)$ Sol.

6. $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{x + 2x^3}$

a) La función es par si:

$f(x) = f(-x)$

$$\frac{1 - 2x^2}{x + 2x^3} = \frac{1 - 2(-x)^2}{(-x) + 2(-x)^3}$$

$$\frac{1 - 2x^2}{x + 2x^3} \neq \frac{1 - 2x^2}{-x - 2x^3}$$

$\therefore$ la función no es par, porque $f(x) \neq f(-x)$ Sol.

b) La función es impar si:

$f(-x) = -f(x)$

$$\frac{1 - 2(-x)^2}{(-x) + 2(-x)^3} = -\left(\frac{1 - 2x^2}{x + 2x^3}\right)$$

$$\frac{1 - 2x^2}{-x - 2x^3} = \frac{1 - 2x^2}{-x - 2x^3}$$

$\therefore$ la función es impar. Sol.

7.- $f(x) = 5x^3 - 7x$

a) La función es par si:

$f(x) = f(-x)$

$5x^3 - 7x = 5(-x)^3 - 7(-x)$

$5x^3 - 7x = -5x^3 + 7x$

$\therefore$ la función no es par poque $f(x) \neq f(-x)$ Sol.

b) La función es impar si:

$f(-x) = -f(x)$

$5(-x)^3 - 7(-x) = -(5x^3 - 7x)$

$-5x^3 + 7x = -5x^3 + 7x$

$\therefore$ la función es impar, porque $f(-x) = -f(x)$ Sol.

8.- $f(x) = x^6 - 1$

a) La función es par si:

$f(x) = f(-x)$

$x^6 - 1 = (-x)^6 - 1$

$x^6 - 1 = x^6 - 1$

$\therefore$ la función es par, pues $f(x) = f(-x)$

b) La función es impar si:

$f(-x) = -f(x)$

$(-x)^6 - 1 = -(x^6 - 1)$

$x^6 - 1 \neq -x^6 + 1$

$\therefore$ f no es impar porque $f(-x) \neq -f(x)$ Sol.

9. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{2x^3 + x}$

a) La función es par si:

$f(x) = f(-x)$

$f(2) = f(-2)$

$$\frac{4(2)^2 - 5}{2(2)^3 + 2} = \frac{4(-2)^2 - 5}{2(-2)^3 + (-2)}$$

$$\frac{16 - 5}{16 + 2} = \frac{16 - 5}{-16 - 2}$$

$$\frac{11}{18} \neq -\frac{11}{18}$$

$\therefore$ la función no es par, porque $f(2) \neq f(-2)$ Sol.

b) La función es impar si:

$f(-x) = -f(x)$

$f(-2) = -f(2)$

$$\frac{4(-2)^2 - 5}{2(-2)^3 + (-2)} = -\frac{4(2)^2 - 5}{2(2)^3 + 2}$$

$$\frac{16 - 5}{-16 - 2} = -\frac{16 - 5}{16 + 2}$$

$$\frac{11}{-18} = -\frac{11}{18}$$

$$-\frac{11}{18} = -\frac{11}{18}$$

$\therefore$ la función es impar, porque $f(-2) = -f(2)$ Sol.

10.- $f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 1$

a) La función es par si:

$f(x) = f(-x)$

$2x^4 - 3x^2 - 1 = 2(-x)^4 - 3(-x)^2 - 1$

$2x^4 - 3x^2 - 1 = 2x^4 - 3x^2 - 1$ Sol.

$\therefore$ la función es par.

b) La función es impar si:

$f(-x) = -f(x)$

$2(-x)^4 - 3(-x)^2 - 1 = -(2x^4 - 3x^2 - 1)$

$2x^4 - 3x^2 - 1 \neq -2x^4 + 3x^2 + 1$ Sol.

$\therefore$ la función no es impar.

De las funciones desarrolladas podemos deducir que si los exponentes de la variable son pares, entonces la función es par, y si los exponentes son impares la función es impar.

Pero existen casos especiales como los de los ejemplos 4 y 5 que no son pares ni impares, por lo que es conveniente que se realice la demostración respectiva.

Si una función es par y está dada por pares ordenados se tiene que:
$(x,y) \in f \Rightarrow (-x,-y) \in f$, siendo dichos pares ordenados simétricos con respecto al eje y, ya que se sustituye x por -x en la función dada.

Luego, <u>la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y</u>.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Compruebe si las funciones siguientes son pares, luego trace el gráfico correspondiente.

1. $f = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$

2. $f = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$

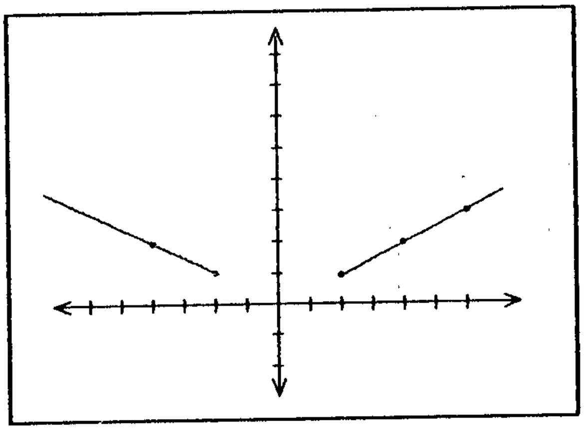
DESARROLLO:

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x,y) = f(-x,y)$$

$$(2,1),(4,2),(6,3),(8,4) \Rightarrow (-2,1),(-4,2),(-6,3),(-8,4)$$

Tracemos el gráfico:



$\therefore$ La gráfica de la función es simétrica con respecto al eje "y". Sol.

2. $f = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$

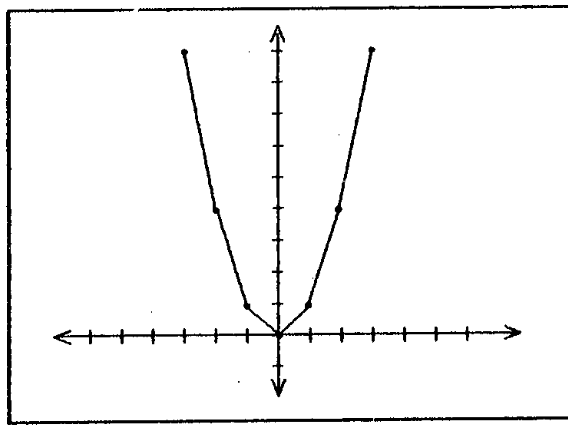
DESARROLLO:

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x,y) \Rightarrow f(-x,y)$$

$$(0,0),(1,1),(2,4),(3,9) \Rightarrow (0,0),(-1,1),(-2,4),(-3,9)$$

Tracemos la gráfica:



$\therefore$ el gráfico de f es simétrico con respecto al eje "y". Sol.

Si una función es impar y está dada por pares ordenados se tiene que:
$(x,y) \in f \Rightarrow (-x,-y) \in f$, siendo dichos pares ordenados simétricos con respecto al origen ya que se sustituye X por -X y Y por -Y en la función dada.

Luego <u>la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen</u>

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Dadas las funciones, compruebe si son impares, luego trace su gráfico.

1. $f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

2. $y = x^3$

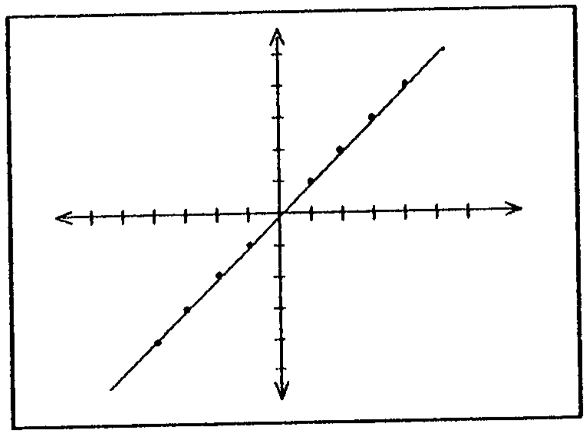
3. $f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

DESARROLLO:

$f(x,y) \Rightarrow f(-x,-y)$

$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \Rightarrow (-1,-1), (-2,-2), (-3,-3), (-4,-4)$

Tracemos el gráfico:



$\therefore$ el gráfico de f es simétrico con respecto al origen Sol.

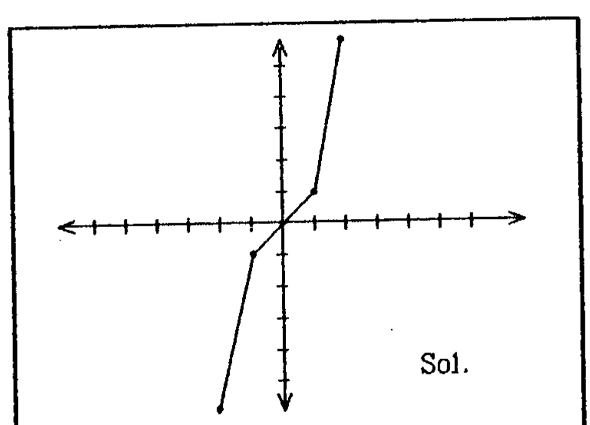
2. $y = x^3$

DESARROLLO:

f(x,y) => f(-x,-y)

(0,0),(1,1),(2,8),(3,27) => (0,0), (-1,-1), (-2,-8), (-3,-27)

Trazamos el gráfico:



10.2. FUNCION EXPONENCIAL

En sus estudios anteriores usted debió haber desarrollado potencias como 2^5, $(-5)^3$, $(\pi)^2$ y otras semejantes. También debe haber trabajado con:
$5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$

$8^0 = 1$

$c^{-3} = 1/c^3$

La forma general de estos ejemplos es a^n, donde a es un número real diferente de cero y n es un número entero. Así mismo debe recordar los exponentes fraccionarios, los cuales equivalen a raices, por ejemplo.

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$$

$$8^{1/3} = \sqrt{8} = 2$$

$$2^{-1/7} = \frac{1}{2^{1/7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2}}$$

Para el estudio de la función exponencial consideremos a la variable como exponente de un número y diferente de 1, entonces a cada número real x corresponde un número real único a^x que se denomina <u>Función Exponencial</u> y la simbolizamos, así: $f(x) = a^x$

POR LO TANTO

Definiremos a la función exponencial de la siguiente manera:
Sea a cualquier número real positivo diferente de 1.
Entonces una función f se llama exponencial de base a, sí y sólo si:
$f=\{(x,y)/y = a^x;\ x \in R\}$

Son ejemplos de funciones exponenciales las siguientes:

$f(x) = (-3/2)^x$ $\quad$ $f(x) = 5^x$ $\quad$ $f(x) = 8^x$

$f(x) = (2/5)^{-x}$ $\quad$ $f(x) = (1/3)^x$ $\quad$ $f(x) = (1/2)^x$

Como observamos en los ejemplos propuestos que las bases son constantes y los exponentes una variable.

Con el fin de obtener geométricamente las propiedades de la función exponencial construiremos el gráfico de las siguientes funciones:

$f(x) = 2^x$; $f(x) = 3^x$; $f(x) = (1/2)^x$; $f(x) = (-3/2)^x$

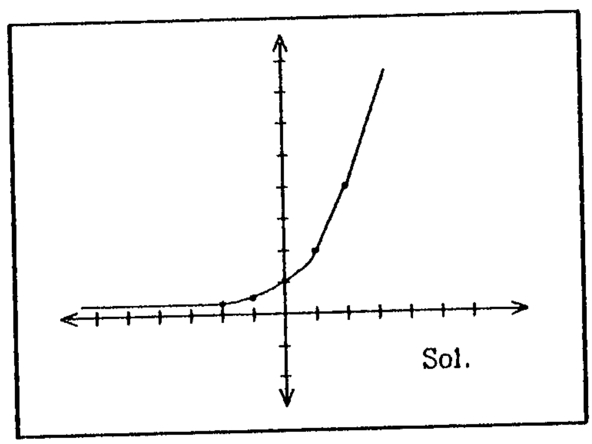
$f(x) = (2/5)^{-x}$

DESARROLLO:

1. $f(x) = 2^x$

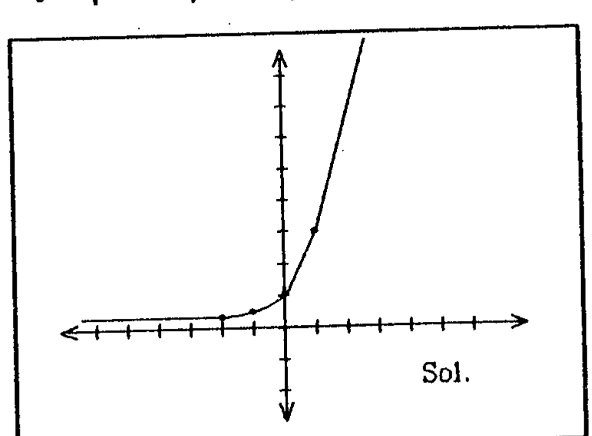
Primeramente asignamos valores a la variable x con el fin de obtener los correspondientes de y, así:

x	0	1	2	-1	-2
y	1	2	4	1/2	1/4



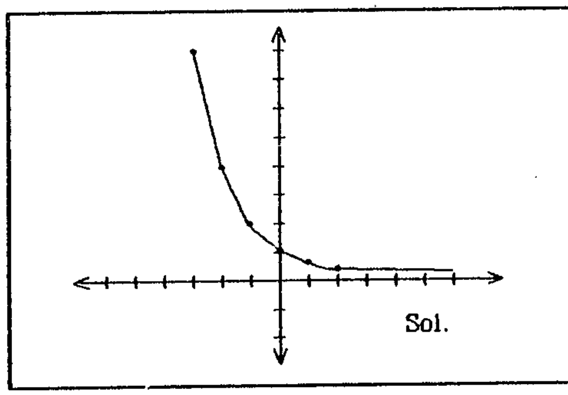
2. $f(x) = 3^x$

x	0	1	2	-1	-2
y	1	3	9	1/3	1/9



3. $f(x) = (1/2)^x$

x	0	1	2	-1	-2	-3
y	1	1/2	1/4	2	4	8



Del análisis de los gráficos podemos deducir lo siguiente:

1.- El gráfico se mantiene siempre sobre el eje de las equis, es decir la función exponencial es positiva para todos los valores de x.

2.- Todos los gráficos que representan una función exponencial pasan por el punto (0,1).

3.- Es creciente la función exponencial si su base es mayor a 1 $(a>1)$

4.- Es decreciente la función exponencial si su base es mayor que cero y menor a 1 $(0<a<1)$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Resuelva las siguientes funciones o ecuaciones exponenciales:

1. $2^x \cdot 3^x = 12.18$

2. $5^x + 5^{1-x} = 6$

3. $5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} = 31$

4. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

Para desarrollar esta clase de ejercicios, debemos tener presente las leyes de los exponentes, a saber.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ---> Producto de potencias de bases iguales

2. $a^x/a^y = a^{x-y}$ ---> Cociente de potencias de bases iguales

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ ---> Potencia de una Potencia

4. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ---> Potencia de un producto

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x 1}$ ---> Potencia de un cociente

6. $a^x\ b^x = (a.b)^x$ ---> Producto de potencias de igual exponente

1. $2^x \cdot 3^x = 12.18$

$$6^x = 2^3 \cdot 3^3$$

$$6^x = 6^3$$

Como las bases son iguales sus exponentes son iguales.
$\therefore\ x = 3$ Sol.

2. $5^x + 5^{1-x} = 6$

DESARROLLO:

$5^x + 5^1 \cdot 5^{-x} = 6$

$5^x + 5/5^x = 6$

$5^{2x} + 5 = 6.5^x$

Con el fin de obtener una ecuación de segundo grado, utilizamos el siguiente artificio de cálculo:

$$5^x = y$$

Entonces:

$$y^2 + 5 = 6$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$(y - 5)\ (y - 1) = 0$$

$$y_1 = 5 \qquad y_2 = 1$$

$$5^x = y = 5 \Rightarrow x = 1$$

$$5^x = y = 1 \Rightarrow x = 0 \qquad \text{Sol.}$$

3. $5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} = 31$

DESARROLLO:

$5^x + 5^x \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5^{-2} = 31$

$5^x + 5^x/5 + 5^x/5^2 = 31$

$5^x + 5^x/5 + 5^x/25 = 31$

$5^x\ (1 + 1/5 + 1/25) = 31$

$5^x\ (31/25) = 31$

$$5^x = \frac{31}{\frac{31}{25}} = \frac{31\ .\ 25}{31}$$

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

$x = 2$ Sol.

4. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$

DESARROLLO:

$3^x\ .\ 3^{-1} + 3^x + 3^x\ .\ 3 = 117$

$3^x\ .\ 1/3 + 3^x + 3^x\ .\ 3 = 117$

$3^x/3 + 3^x + 3^x\ .\ 3 = 117$

$3^x\ (1/3 + 1 + 3) = 117$

$$3^x \left(\frac{1 + 3 + 9}{3}\right) = 117$$

$3^x = (13/3) = 117$

$$3^x = \frac{117}{\frac{13}{3}}$$

$$3^x = \frac{117.3}{13}$$

$3^x = 9 \times 3$

$3^x = 3^3$

$x = 3$ Sol.

2. Trazar el gráfico de las siguientes funciones exponenciales:

1. $g(x) = (1/4)^x$

2. $f(x) = (4)^x$

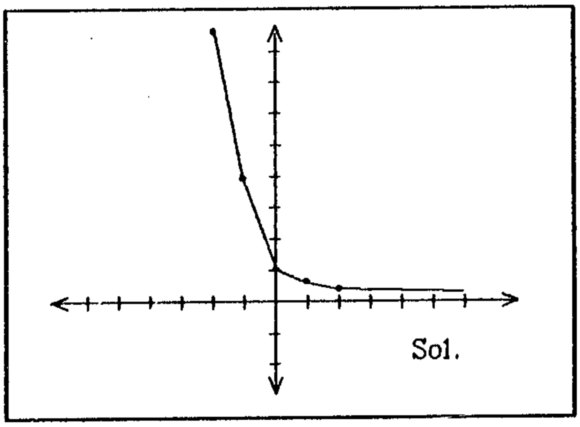
3. $f(x) = (1/3)^x$

4. $g(x) = 5^x$

DESARROLLO:

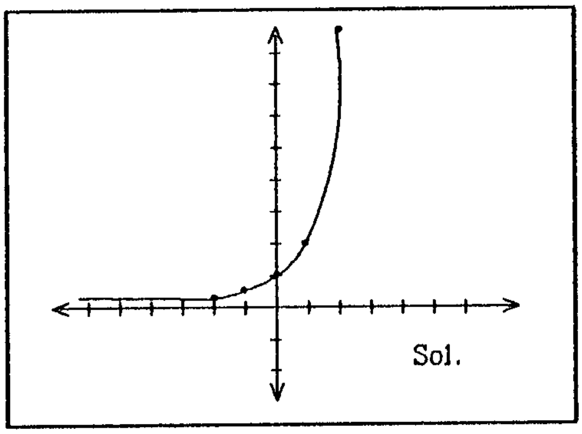
1. $g(x) = (1/4)^x$

x	0	1	2	-1	-2
y	1	1/4	1/16	4	16



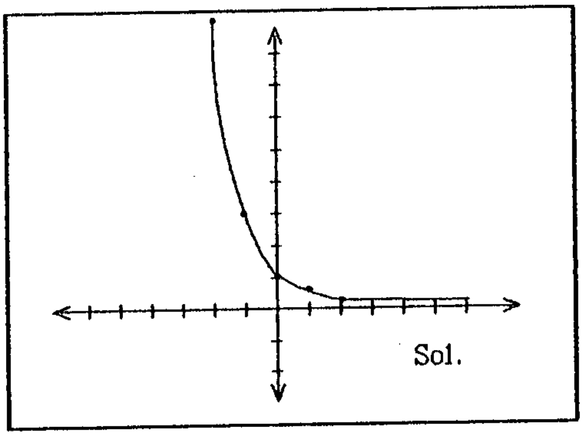
2. $f(x) = (4)^x$

x	0	1	2	-1	-2
y	1	4	16	1/4	1/16



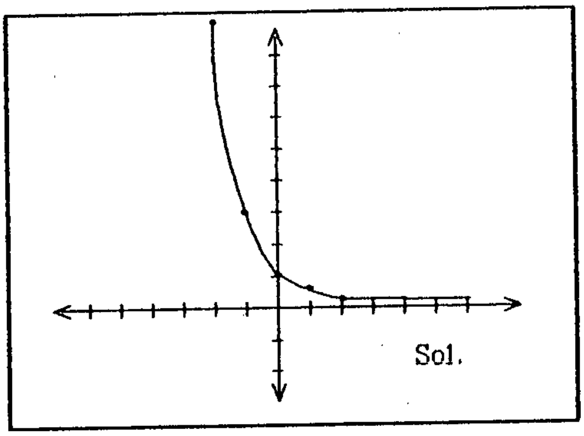
3. $f(x) = (1/3)^x$

x	0	1	2	-1	-2
y	1	1/3	1/9	3	9



4. $g(x) = 5^x$

x	0	1	-1	-2
y	1	5	1/5	1/25



10.3. FUNCION LOGARITMICA

La función logarítmica de base a (a = 1 y a > 0) es la inversa de la función exponencial de base a, que se denota por y = log x que lee logaritmo de x en base a de a.

$$\boxed{y = \log_a x \iff x = a^y}$$

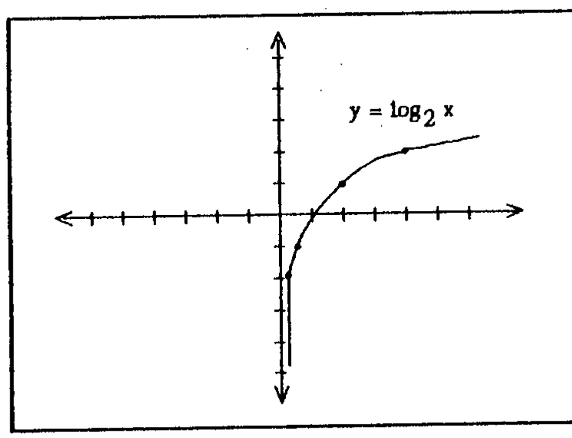
El dominio de la función exponencial de base a es el conjunto de los números reales y su codominio el conjunto de números positivos. Por tanto el dominio de $\log_a$ es el conjunto de los números positivos y su codominio el conjunto de los números reales. Como ejemplo vamos a construir el gráfico de:

$$y = \log_2 x$$

Esta igualdad equivale a $2^y = x$, bastará dar valores a la variable y para encontrar los correspondientes de x.

Luego, como de costumbre, graficamos los puntos (x,y) y los unimos con una línea curva suave.

x	1	2	4	1/2	1/4
y	0	1	2	-1	-2

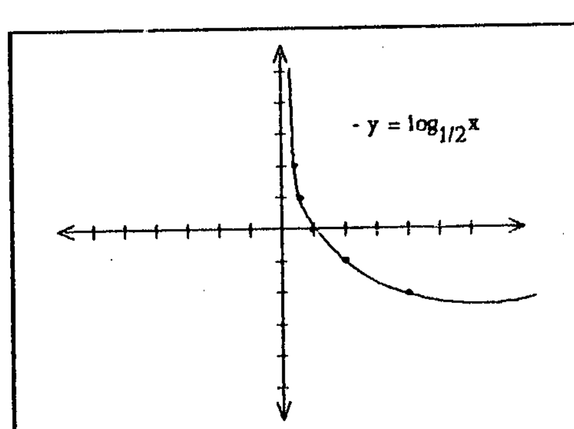


Otro ejemplo.

Dada la función $y = \log_{1/2} x$. Trazar el gráfico correspondiente.

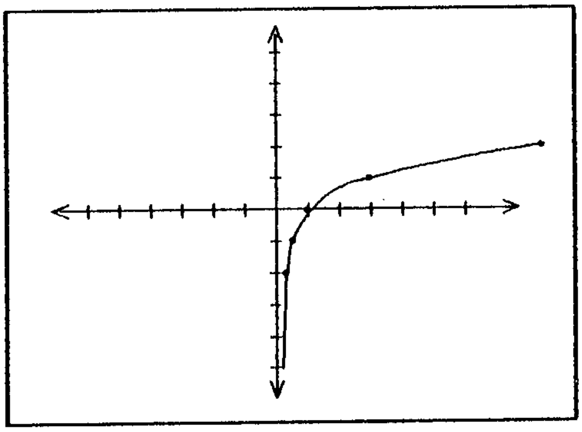
$$(1/2)^y = x$$

x	1	1/2	1/4	2	4
y	0	1	2	-1	-2



Dada la función $y = \log_3 x$. Trazar el gráfico correspondiente.

x	1	3	9	1/3	1/9
y	0	1	2	-1	-2



De la observación de los gráficos podemos decir que la función logarítmica al igual que la función exponencial es contínua, lo cual se justifica por ser funciones inversas.

Del análisis de los gráficos podemos indicar las siguientes propiedades. Cualquiera que sea la base, se cumple:

1.- El logaritmo de la unidad es cero; log 1 = 0 porque

$$a^0 = 1$$

2.- El logaritmo de la base es 1; $\log_a a = 1$ porque

$$a^1 = a$$

3.- Los números negativos no tienen logaritmo, porque

a^x (no adquiere valores negativos)

Si la base es mayor que la unidad, tenemos:

1.- Cuando el número crece de 0 en forma indeterminada, su logaritmo crece desde $-\alpha$ a $+\alpha$, es decir, la función es monótona creciente.

2.- El logaritmo de los números positivos, mayores que la unidad, es positivo.

3.- El logaritmo de los números positivos, menores que la unidad, es negativo.

Si la base es positiva y menor que la unidad, las propiedades 1, 2 y 3 serían las inversas a éstas.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1.- Escriba la ecuación logarítmica equivalente a cada una de las ecuaciones exponenciales siguientes:

a. $3^4 = 81$

b. $2^5 = 32$

c. $y^x = 10$

d. $8^{2/3} = 4$

Desarrollando los ejercicios propuestos tenemos:

a. $3^4 = 81$

$\log_3 81 = 4$ Sol.

b. $2^5 = 32$

$\log_2 32 = 5$ Sol.

c. $y^x = 10$

$\log 10 = x$ Sol.

d. $8^{2/3} = 4$

$\log_8 4 = 2/3$ Sol.

2.- Escriba en forma exponencial cada una de las funciones logarítmicas:

a. $\log_3 27 = 3$

b. $\log_{1/4} 4 = -1$

c. $\log_{10} x = y$

d. $\log_{32} 2 = 1/5$

Efectuando los ejercicios propuestos tenemos:

a. $\log_3 27 = 3$

$3^3 = 27$ Sol.

b. $\log_{1/4} 4 = -1$

$(1/4)^{-1} = 4$ Sol.

c. $\log_{10} x = y$

$(10)^y = x$ Sol.

d. $\log_{32} 2 = 1/5$

$(32)^{1/5} = \sqrt[5]{32} = 2$ Sol.

3.- Trazar el gráfico de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log_{10} x$

b. $f(x) = \log_4 x$

c. $f(x) = \log_{1/3} x$

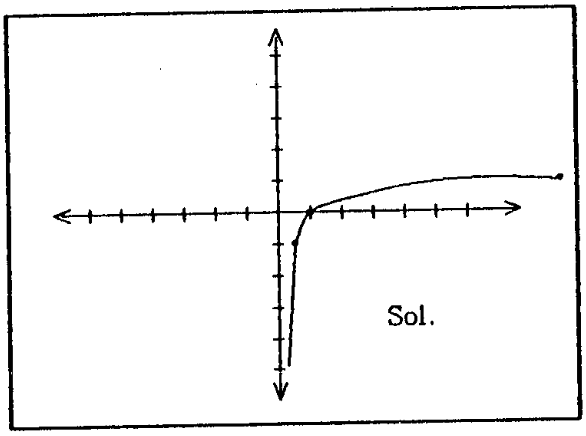
d. $g(x) = \log_{1/10} x$

DESARROLLO:

a. $f(x) = \log_{10} x$

$10^y = x$

x	1	10	1/10
y	0	1	-1



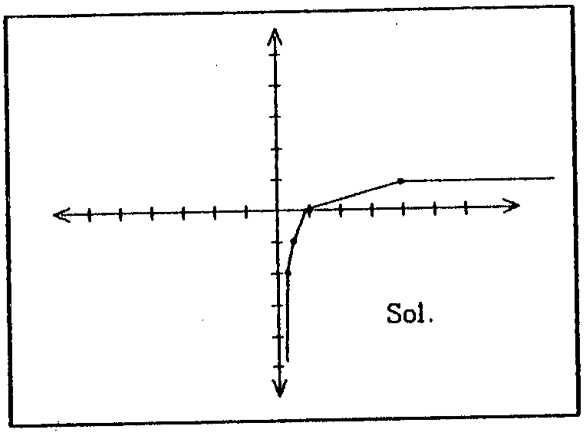
b. $f(x) = \log_4 x$

DESARROLLO:

$y = \log_4 x$

$4^z = x$

x	1	4	1/4	1/16
y	0	1	-1	-2



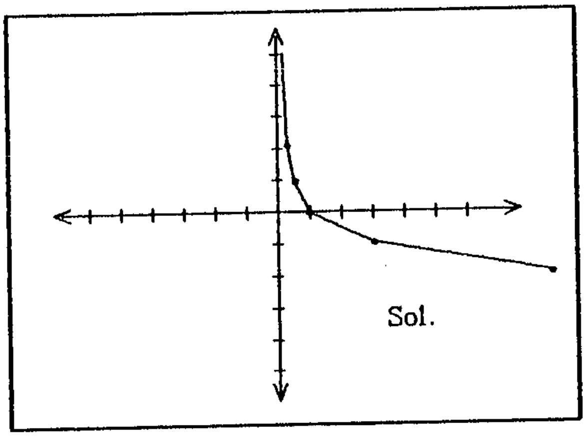
c. $f(x) = \log_{1/3}x$

DESARROLLO:

$y = \log_{1/3}x$

$(1/3)^y = x$

x	1	1/3	1/9	3	9
y	0	1	2	-1	-2

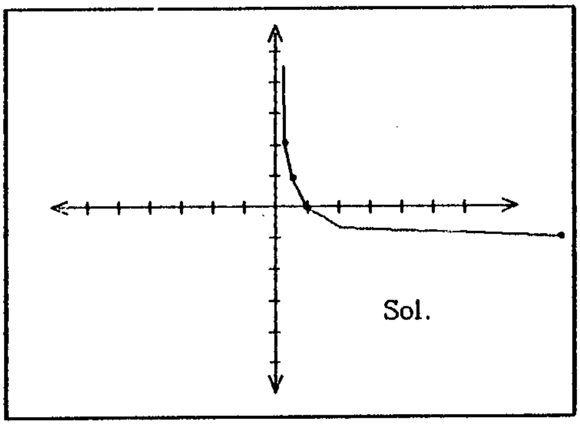


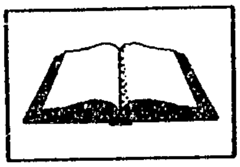
d. $g(x) = \log_{1/10}x$

DESARROLLO:

$(1/10)^y = x$

x	1	1/10	1/100	10
y	0	1	2	-1





ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 10

<u>Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos</u>:

1. Compruebe si las siguientes funciones son pares o impares.

   a. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 5}$

   b. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

   c. $f(x) = x^2 + 3x + 12$

   d. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$

   e. $f(x) = x(x - 1)$

2. Realice la gráfica de las siguientes funciones definidas de R--->R y diga si es par o impar o ninguna de las dos.

   a. $f(x) = 2x$

   b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   c. $f(x) = x^2 + 2x$

   d. $f(x) = 5 - 2x$

   e. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$

3. Resuelva las siguientes funciones o ecuaciones exponenciales.

   a. $7^{2x+3} - 8(7^{x+1}) + 1 = 0$

   b. $2^{2x} - 3(2^{x+1}) + 8 = 0$

   c. $4^x(5^{x-1}) = 1600$

   d. $4^x - 5(2^x) + 4$

   e. $2^{x+2} = 0,5^{2x-1}$

4. Trace el gráfico de las siguientes funciones exponenciales:

a. $f(x) = (1/5)^x$

b. $g(x) = (6)^x$

c. $h(x) = (3)^x$

d. $m(x) = (10)^x$

5. Escriba la ecuación logarítmica equivalente a cada una de las ecuaciones exponenciales siguientes:

a. $7^2 = 49$

b. $x^{10} = y$

c. $5^3 = 125$

d. $81^{3/4} = 27$

6. Escriba en forma exponencial cada una de las siguientes funciones logarítmicas:

a. $\log_8 64 = 2$

b. $\log_3 81 = 4$

c. $\log_2 1 = 0$

d. $\log_{16} 1/2 = -3/4$

7. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

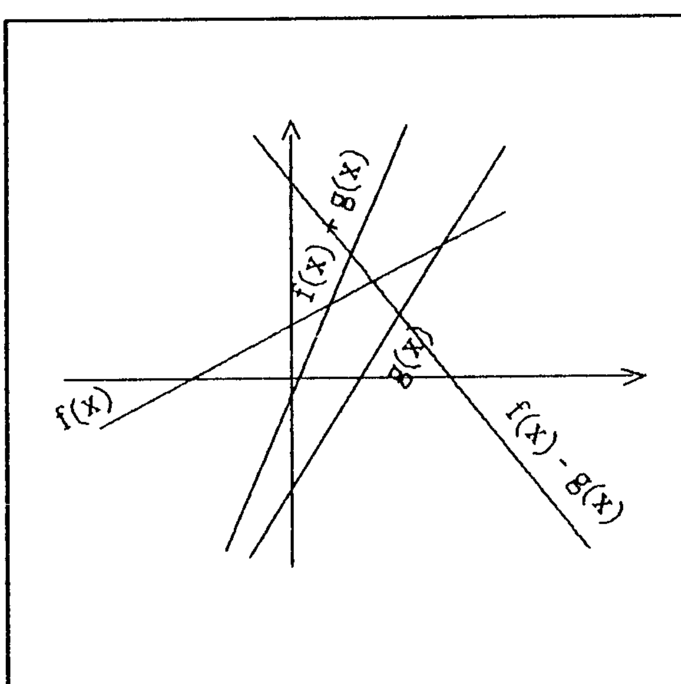
a. $f(x) = \log_3 x^2$

b. $g(x) = \log_5 x$

c. $h(x) = \log_{1/4} x$

d. $g(x) = \log_b x$

UNIDAD 11:	OPERACIONES CON FUNCIONES	



OBJETIVO 11	Realizar operaciones con funciones y representar gráficamente.

ALGEBRA DE FUNCIONES

Considerando los conocimientos que usted tiene sobre las operaciones de los números reales y funciones conjuntistas nos es posible introducir operaciones con funciones como son: suma, diferencia, producto y cociente.

11.1. FUNCION SUMA

Dadas las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 3x - 5$ definida de R en R. Determine la función suma:

DESARROLLO:

La suma de f y g será la función que a cada x asocia la suma de las imágenes f(x) y g(x), o sea:

$f(x) + g(x) = (x - 1) + (3x - 5)$

$(f + g)(x) = x - 1 + 3x - 5$

$(f + g)(x) = 4x - 6$

Del análisis del ejemplo anterior podemos definir a la función suma de la siguiente manera:

DEFINICION:

Se denomina función suma de f con g a la intersección del dominio de f con el dominio de g, lo cual se denota por:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in R$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Hallar la función suma de f y g siendo: $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$; $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 2$, definidas de R--->R.

DESARROLLO:

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 5$$

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 2$$

$$(f + g)(x) = 4x^2 - 3x + 5 + 2x^3 - 4x^2 + 3x - 2$$

$$(f + g)(x) = 2x^3 + 3 \qquad \text{Sol.}$$

2. Determinar el dominio de las siguientes sumas de funciones.

$$f(x) = \frac{2}{x - 3} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x - 1}$$

DESARROLLO:

$$f(x) = \frac{2}{x - 3}$$

$$g(x) = \sqrt{x - 1}$$

$$(f + g)(x) = \frac{2}{x - 3} + \sqrt{x - 1}$$

$$(f + g)(x) = \frac{2 + x - 3\sqrt{x - 1}}{x - 3}$$

Determinamos el dominio de cada función y de la suma

$$f(x) = \frac{2}{x - 3} \qquad g(x) = \sqrt{x - 1}$$

Dom f = R - {-3} Dom g = R^+

Dom (f + g) = Dom f ∩ Dom g

Dom (f + g) = R - {3} ∩ R^+

= R > 3

Dom (f + g) = [4.....α[Sol.

3. Dadas las funciones f y g. Calcular la función suma y determinar su dominio.

$$f(x) = \frac{x}{(x - 1)(x + 2)} \qquad g(x) = x^3 + x + 3$$

$$(f + g)(x) = \frac{x}{(x - 1)(x + 2)} + x^3 + x + 3$$

$$(f + g)(x) = \frac{x + (x + 1)(x + 3)(x^3 + x + 3)}{(x - 1)(x + 2)}$$

$$(f + g)(x) = \frac{x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 6}{(x - 1)(x + 2)}$$

Dom (f + g) = Dom f ∩ Dom g

= R - {1, -2}

4. Represente gráficamente, en un solo diagrama las funciones f, g y f+g siendo f(x) = 2x-1 y g(x)=(x -1)/2

DESARROLLO:

Primeramente obtenemos la función suma:

$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = \frac{x - 1}{2}$$

$$(f + g)(x) = 2x - 1 + \frac{x - 1}{2}$$

$$(f + g)(x) = \frac{2(2x - 1) + x - 1}{2}$$

$$(f + g)(x) = \frac{4x - 2 + x - 1}{2}$$

$$(f + g)(x) = \frac{5x - 3}{2}$$

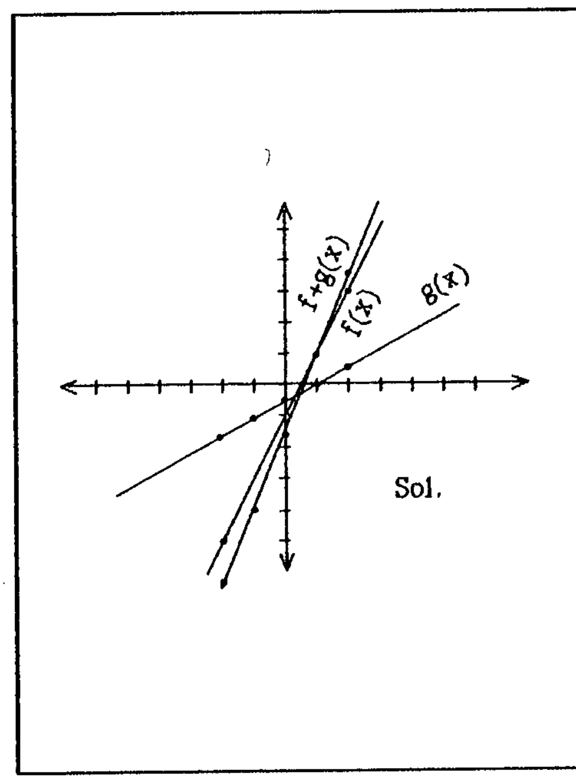
Representamos gráficamente las funciones dadas.

$f(x) = 2x - 1$

x	0	1	2	-1	-2
y	-1	1	3	-3	-5

$$g(x) = \frac{x - 1}{2}$$

x	0	1	2	-1	-2
y	1/2	0	1/2	-1	-3/2



$$(f + g)(x) = \frac{5x - 3}{2}$$

x	0	1	2	-1	-2
y	-3/2	1	7/2	-4	-13/2

5. Dadas las funciones $f(x) = 4$ y $g(x) = -x-1/2$. Determine la función suma, el dominio y represente gráficamente.

$f(x) = 4$

$g(x) = - x - 1/2$

$(f + g)(x) = 4 + (- x - 1/2)$

$(f + g)(x) = 4 - x - 1/2$

$$(f + g)(x) = \frac{8 - 2x - 1}{2}$$

$$(f + g)(x) = \frac{7 - 2x}{2}$$

$\text{Dom } (f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

$= R$

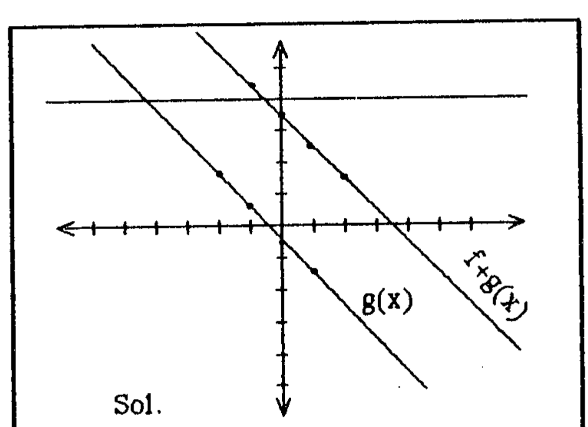
$g(x) = - x - 1/2$

$y = - x - 1/2$

x	0	1	-1	-2
y	-1/2	-3/2	1/2	3/2

$$(f + g)(x) = \frac{7 - 2x}{2}$$

x	0	1	2	-1	-2
y	7/2	5/2	3/2	9/2	11/2



6. Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$. Determine la función suma, dominio y represente gráficamente.

DESARROLLO:

$f(x) = x^2$

$g(x) = x + 2$

$(f + g)(x) = x^2 + x + 2$

$Dom\ (f + g) = Dom\ f + Dom\ g$

$Dom\ (f + g) = R$

$f(x) = x^2$

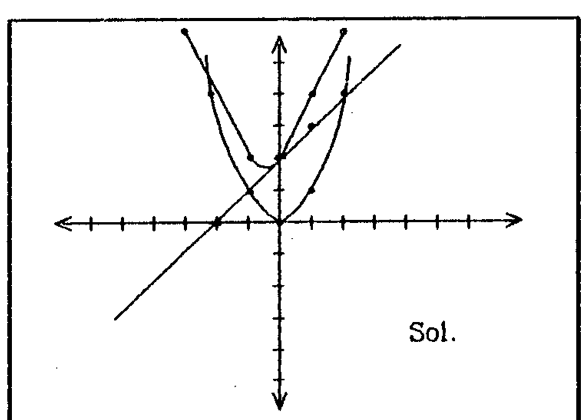
x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

$g(x) = x + 2$

x	0	1	2	-1	-2
y	2	3	4	1	0

$(f + g) = x^2 + x + 2$

x	0	1	2	-1	-2	-3
y	2	4	8	2	4	8

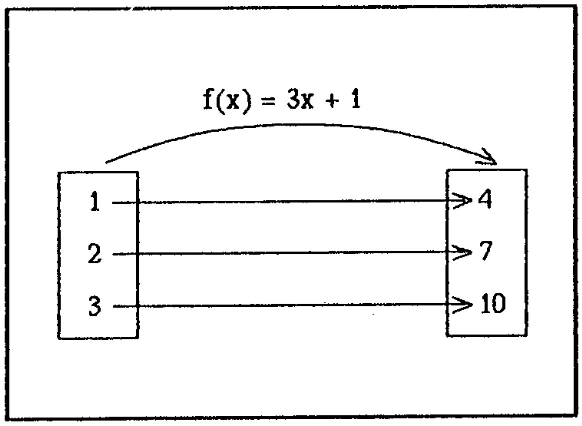


7. Hallar f + g si f y g son funciones de A--->R

$A = \{1,2,3\}$, $f(x) = 3x + 1$
$g = \{(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3), (5,3)\}$

DESARROLLO:

Determinamos la función f, así:



Hallemos f + g

Dom f = {1,2,3} Dom g = {0,1,2,3,4,5}

Dom f ∩ Dom g = {1,2,3}

(f + g)(x) = f(x) + g(x)

(f + g)(x) = f(x) + g(x)

(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 4 + 3 = 7

(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 7 + 3 = 10

(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 10 + 3 = 13

(f + g) = {(1,7),(2,10),(3,13)} Sol.

8. Hallar la función (f + g)(-2) si conocemos f(x) = x + 3 y $g(x)=x^2+2x+3$

DESARROLLO:

Por la definición sabemos que:

(f + g)(x) = f(x) + g(x)

(f + g)(-2) = f(-2) + g(-2)

(f + g)(-2) = (-2 + 2) + $(-2)^2$ + 2(-2) + 3

(f + g)(-2) = 0 + 4 - 4 + 3

(f + g)(-2) = 3 Sol.

11.2. FUNCION DIFERENCIA

Sean las funciones f(x) = 3x + 5 y g(x) = x^3 + 3x + 5; definidas de R--->R. Determine f - g

DESARROLLO:

La resta de funciones se realiza de igual forma que la diferencia de expresiones algebráicas, tomando en cuenta que al sustraendo hay que cambiar de signo y luego reducir términos semejantes.

$$f(x) - g(x) = 3x + 5 - (x^3 + 3x + 5)$$

$$= 3x + 5 - x^3 - 3x - 5$$

$$f(x) - g(x) = -x^3$$

Del ejercicio desarrollado podemos definir la función diferencia de la siguiente manera:

DEFINICION:

> Se denomina función diferencia de f con g a la función definida por f-g mediante la fórmula:
> $(f-g)(x) = f(x) - g(x)\ \forall\ x \in R$
> El dominio de esta operación será la intersección del dominio de f con el dominio de g.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea f de R--->R definida por: $f(x) = 1/x$ y g: R--->R definida por $g(x) = x^2 + 3x - 2$. Determine $f - g$

DESARROLLO:

$$(f - g)(x) = 1/x - (x^2 + 3x - 2)$$

$$= 1/x - x^2 - 3x + 2$$

$$(f - g)(x) = \frac{1 - x^3 - 3x^2 + 2x}{x}$$

$$(f - g)(x) = \frac{-3x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{x} \qquad \text{Sol.}$$

2. De $f(x) = x^2 - 2x + 3$ restar $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

DESARROLLO:

$$(f - g)(x) = x^2 - 2x + 3 - (2x^2 + 3x - 5)$$

$(f - g)(x) = x^2 - 2x + 3 - 2x^2 - 3x + 5$

$(f - g)(x) = -x^2 - 5x + 8$ Sol.

3. De la suma de $f(x) = 2x + 1$ con $g(x) = x^2 - 2$, restar la suma de $h(x) = 2x^2 + 2$ con $m(x) = 2x + 3$

DESARROLLO:

Primero realizamos la suma de las funciones dadas para obtener el minuendo con el sustraendo y luego la operación diferencia.

$(f + g)(x) = 2x + 1 + x^2 - 2$ $(h + m)(x) = 2x^2 + 2 + 2x + 3$

$(f + g)(x) = x^2 + 2x - 1$ $(h + m)(x) = 2x^2 + 2x + 5$

$(f + g)(x) - (h + m)(x) = x^2 + 2x - 1 -(2x^2 + 2x + 5)$

$(f + g)(x) - (h + m)(x) = x^2 + 2x - 1 - 2x^2 - 2x - 5$

$(f + g)(x) - (h + m)(x) = - x^2 - 6$ Sol.

4. Sean las funciones reales $f(x) = 5x^3 - 7x$ y $g(x) = x + 3$. Hallar $f - g$ y el dominio de la operación.

DESARROLLO:

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f - g)(x) = 5x^3 - 7x - (x + 3)$

$(f - g)(x) = 5x^3 - 7x - x - 3$

$(f - g)(x) = 5x^3 - 8x - 3$ Sol.

$\text{Dom } (f - g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

$\text{Dom } (f - g) = R$

5. Sean las funciones reales g y h definidas por $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$. Hallar $(g - h)(x)$ y represente gráficamente en un solo diagrama: g, h y $(g - h)$

DESARROLLO:

$(g - h)(x) = x - x^2$

$(g - h)(x) = x(1 - x)$

Representamos gráficamente cada una de las funciones.

$g(x) = x$

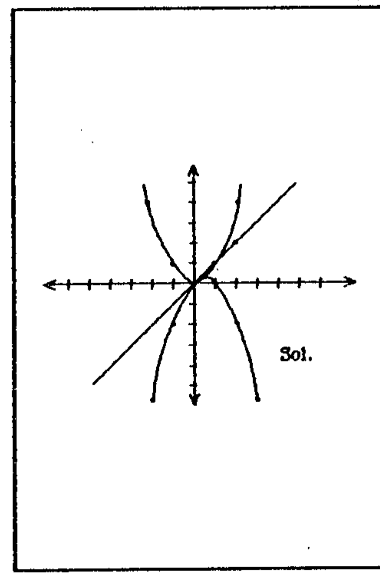
x	0	1	2
y	0	1	2

$h(x) = x^2$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	0	1	4	9	1	4

$(g - h)(x) = x - x^2$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	0	0	-2	-6	-2	-6

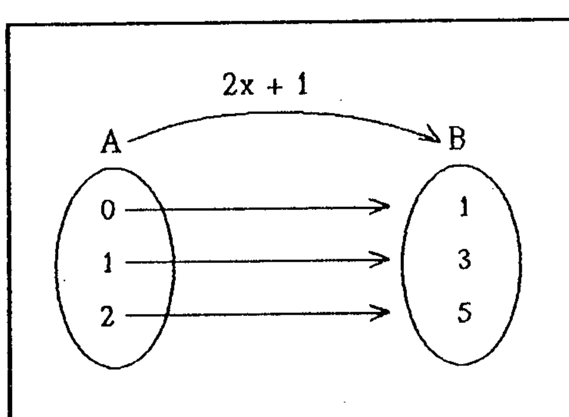


6. Halle f - g si se conoce que f y g son funciones de A en R.

$A = \{0,1,2\}$, $f(x) = 2x + 1$ y $g = \{(0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2)\}$

DESARROLLO:

Determinamos la función f.



$\Rightarrow f = \{(0,1),(1,3),(2,5)\}$

Dom $f = \{0,1,2\}$

Dom $g = \{0,1,2,3,4,5\}$

Dom f ∩ Dom g = {0,1,2}

(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 1 - 2 = -1

(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 3 - 2 = 1

(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 5 - 2 = 3

f - g = {(0,-1),(1,1),(2,3)}   Sol

7. Halle (f-g) dado $f(x) = x^2+2x-3$ y $g(x) = -x^2 + 3x - 1$ y trace su gráfico.

DESARROLLO:

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

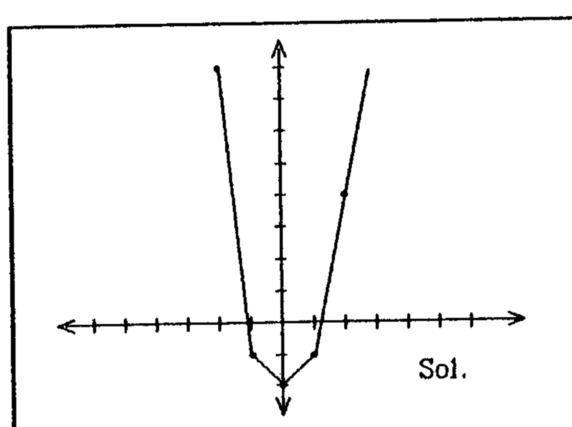
$(f - g)(x) = x^2 + 2x - 3 - (- x^2 + 3x - 1)$

$(f - g)(x) = x^2 + 2x - 3 + x^2 - 3x + 1$

$(f - g)(x) = 2x^2 - x - 2$ Sol.

Trazamos el gráfico de (f - g):

x	0	1	2	-1	-2
y	-2	-1	4	-1	8



11.3. FUNCION PRODUCTO

Sean f de R--->R y g de R--->R dos funciones definidas respectivamente por $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x - 2$. Determine la función producto.

DESARROLLO:

El producto de funciones se obtiene multiplicando f por g como si se tratara de dos expresiones algebráicas.

$(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$(f.g)(x) = (x + 2)(x - 2)$

$(f.g)(x) = x^2 - 2x + 2x - 4$

$(f.g)(x) = x^2 - 4$ Sol.

Esta es la función producto de f.g cuyo dominio es la intersección de los dominios de las funciones dadas.

Del análisis del ejercicio desarrollado, definimos a la función producto así:

DEFINICION:

Sean f: R--->R y g: R--->R dos funciones, entonces llamamos función producto de f y g a la función que se denota por f.g mediante la fórmula:
$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)\ \forall x \in R$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea f: R--->R definida por $f(x) = 1/x$ y g: R--->R definida por $g(x)=x^2+3x-2$. Determine f.g

DESARROLLO:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$= 1/x \cdot x^2 + 3x - 2$

$$= \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$$

2. Calcule el producto conociendo que: $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x + 1$

DESARROLLO:

$(f \cdot g)(x) = (2x - 3)(x + 1)$

$(f \cdot g)(x) = 2x^2 + 2x - 3x - 3$

$(f \cdot g)(x) = 2x^2 - x - 3$ Sol.

3. Efectúe el siguiente producto de funciones si $h(x) = x^3-2x^2+x-2$ y $g(x) = 2x + 5$

DESARROLLO:

$(h \cdot g)(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 2)(2x + 5)$

$(h \cdot g)(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 + x - 10$ Sol.

4. Determinar la función producto, el dominio de definición, si:

$f(x) = \sqrt{x - 1}$ y $g(x) = \sqrt{5 - x}$

DESARROLLO:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$(f \cdot g)(x) =(\sqrt{x - 1})(\sqrt{5 - x})$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{(x - 1)(5 - x)}$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{- x^2 + 6x - 5}$

$\text{Dom }(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

$\text{Dom }(f \cdot g) = R^+ - \{0\} \cap R < 6$

$\text{Dom }(f \cdot g) = \{1,2,3,5\}$ Sol.

5. Sean las funciones $h(x) = 4/x$ y $k(x) = 3/(x - 3)$. Determine el producto.

DESARROLLO:

$(h \cdot k)(x) = h(x) \cdot k(x)$

$$(h \cdot k)(x) = \left(\frac{4}{x}\right)\left(\frac{3}{x - 3}\right)$$

$$(h \cdot k)(x) = \frac{12}{x^2 - 3x} \quad \text{Sol.}$$

6. Dadas las funciones $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = - x^2 + x + 1$. Determine la función producto y el dominio de definición.

DESARROLLO:

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$= (2x + 5)(-x^2 + x + 1)$$

$$= -2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$$

$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

$\text{Dom}(f \cdot g) = R \cap R$

$\text{Dom}(f \cdot g) = R$ Sol.

11.4. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA FUNCION

El producto de un escalar a ($a \in R$) por una función f se denota por:

a.f definida de R--->R que simbólicamente se representa así:

$$\boxed{(a.f)(x) = a.f(x)}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Determine 3h si se conoce que $h(x) = 2x - 2$

DESARROLLO:

$(a.h)(x) = a(h(x))$

$(a.h)(x) = 3(2x - 2)$

$(a.h)(x) = 6x - 6$ Sol.

2. Sea la función real f definida por $f(x) = 2x^2 + x - 2$. Calcular $1/2f(x)$

DESARROLLO:

$(a.f)(x) = a.f(x)$

$(a.f)(x) = 1/2\,(2x^2 + x - 2)$

$$(a.f)(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{2} \quad \text{Sol.}$$

11.5. FUNCION COCIENTE

Sean h: R--->R y g: R--->R; dos funciones definidas por:

$$h(x) = \frac{x}{(x - 1)(x + 2)} \text{ y } g(x) = x^3 + x + 3.$$

Determine la función cociente.

DESARROLLO:

El cociente de dos funciones se obtiene dividiendo h entre g como si se tratara de dos expresiones algebráicas.

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}}{x^3 + x + 3}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{x}{x^5 + x^4 - x^3 + 4x^2 + x - 6} \qquad \text{Sol.}$$

Del análisis del ejercicio desarrollado definimos a la función cociente así:

DEFINICION:

> Sean f: R--->R y g: R--->R dos funciones, entonces llamamos función cociente de f y g a la función que se denota por f/g mediante la fórmula:
> $(f/g)(x)=f(x)/g(x) \forall x \in R$ y $g(x) \neq 0$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Dadas las funciones $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 10$ y $g(x) = x + 3$. Determine la función cociente y el residuo.

DESARROLLO:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 10}{x + 3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x^4 - 9x^3 + 32x^2 - 100x + 301$$

Residuo $(x) = 913$ Sol.

2. Divida h/g si $h(x) = -2x^3 - 4x^2 + x - 3$ y $g(x) = 2x - 5$

DESARROLLO:

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{-2x^3 - 4x^2 + x - 3}{2x^2 - 5}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = x - 4 \qquad \text{Sol.}$$

Residuo $(x) = -4x + 17$

3. Si $g(x) = 2x + 10$ y $k(x) = x + 5$. Calcular la función cociente.

DESARROLLO:

$$\left(\frac{g}{k}\right)(x) = \frac{2x + 10}{x + 5}$$

$$\left(\frac{g}{k}\right)(x) = \frac{2(x + 5)}{(x + 5)}$$

$$\left(\frac{g}{k}\right)(x) = 2 \qquad \text{Sol.}$$

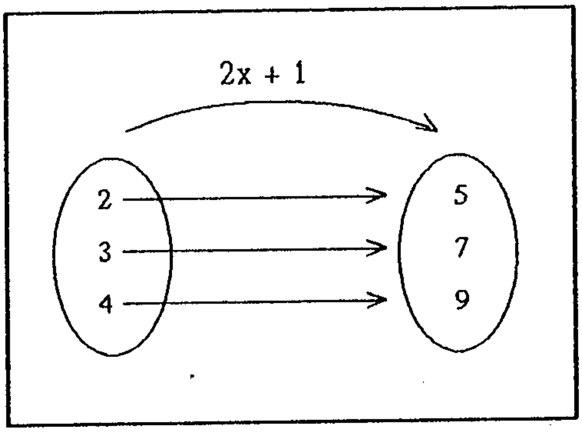
4. Halle h/g si sabemos que h y g son funciones de P en R.

$h(x) = 2x + 1$ $\qquad$ $P = \{2,3,4\}$

$g = \{(3,4),(1,2),(5,2),(4,5)\}$

DESARROLLO:

Determinamos la función h, así:



entonces h : {(2,5),(3,7),(4,9)}

Dom h = {2,3,4}

Dom g = {1,3,4,5}

Dom h/g = {3,4}

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(3) = \frac{h(3)}{g(3)} = \frac{7}{4}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(4) = \frac{h(4)}{g(4)} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{h}{g} = \{(3,7/4),\ (4,9/5)\}$$ Sol.

5. Dadas $f(x) = 1/(x + 1)$ y $g(x) = x/(x^2 - 2x)$. Hallar la función cociente y su dominio.

DESARROLLO:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2-2x}} = \frac{x^2 - 2x}{x(x+1)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x} = \frac{x(x-2)}{x(x+1)}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{x - 2}{x + 1} \qquad \text{Sol.}$$

Dom $f/g(x) = R - \{-1\}$

6. Sea $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = (x - 3)/2$. Calcular f+g; f-g; f.g; f/g y determinar el dominio de cada operación.

DESARROLLO:

ADICION

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f + g)(x) = 2x - 3 + \frac{x - 3}{2}$$

$$(f + g)(x) = \frac{(2x - 3) + x - 3}{2}$$

$$(f + g)(x) = \frac{5x - 9}{2}$$

Dom $(f + g)$ = Dom f $\cap$ Dom g

Dom $(f + g) = R \cap R$

Dom $(f + g) = R$ Sol.

DIFERENCIA

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f - g)(x) = 2x - 3 - \left(\frac{x - 3}{2}\right)$$

$$(f - g)(x) = \frac{4x - 6 - x + 3}{2}$$

$$(f - g)(x) = \frac{3x - 3}{2}$$

$$(f - g)(x) = \frac{3(x - 1)}{2}$$

Dom $(f - g)$ = Dom f $\cap$ Dom g

Dom $(f - g) = R \cap R$

$\text{Dom } (f + g) = R$ Sol.

PRODUCTO

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x - 3)\left(\frac{x - 3}{2}\right)$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{2x^2 - 9x + 9}{2}$$

$$\text{Dom } (f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$$

$$\text{Dom } (f \cdot g) = R \cap R$$

$\text{Dom } (f \cdot g) = R$ Sol.

COCIENTE

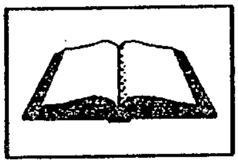
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x - 3}{\frac{x - 3}{2}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x - 6}{x - 3}$$

$$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } \frac{f}{g}$$

$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = R - \{3\}$ Sol.



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 11

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos:

1. Calcule la función suma y determine el dominio de cada una.

   a. $f(x) = x^3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

   b. $f(x) = x + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^3}$

   c. $f(x) = 4x^2 - 7x + 5$ y $h(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 10$

   d. $f(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 3x - 2$

2. Halle $(f + g)$ si f y g son funciones de $B \text{---}> R$ y $B=\{2,4,6\}$; $f(x) = 5x + 2$ y $g = \{(2,3),(5,4),(3,3),(6,2)\}$

   Represente gráficamente en un solo diagrama las funciones f y h y $(f + h)$ siendo:

   a. $f(x) = 2 + x$; $h(x) = x^3 + x^2 - x$

   b. $f(x) = 4 - x^2$; $h(x) = 3x + 5$

   c. Calcular la función $(g + h)(-6)$ sin conocemos que: $g(x) = 3x - 1$ y $h(x) = - 2x + 5$

3. Calcule la función diferencia y determinar el dominio de cada una:

   a. $f(x) = 2x - 1$ $g(x) = 3/x$

   b. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ $g(x) = 3x^2 - 4$

   c. $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ $g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

   d. $f(x) = x - 5$ $g(x) = x^2 - 1$

   e. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2 + 1$

4. De la suma de $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$ con $g(x) = 1/x$ reste la suma de $h(x) = x - 2$ con $g(x) = x + 7$

5. Represente gráficamente y en un solo diagrama las funciones g, h y $(g - h)$ si:

a. $g(x) = 2x - 3$ y $h(x) = 3x + 2$

b. $g(x) = 4x + 7$ y $h(x) = x + 3$

6. En los ejercicios siguientes calcule la función producto y determine el dominio en cada caso.

a. $f(x) = 4x + 7$ y $g(x) = x + 3$

b. $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$ y $g(x) = 2x + 10$

c. $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 2/x$

d. $g(x) = \sqrt{x - 2}$ y $k(x) = \sqrt{x + 3}$

e. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

f. $f(x) = 5$ y $g(x) = \dfrac{5x^2}{2} - 1$

g. $f(x) = x^2 - x + 3$ y $g(x) = x^4 + x^3 + x^2$

14. Calcule $2(f.g)$ si $f(x) = 1/(x + 1)$ y $g(x) = (1 - x)/x$

15. Halle el resultado de $(3f)(2g)$ si $f(x) = x^3$ y $g(x) = 1/(x^2 + 1)$

16. Sea la función real f definida por $3x^2 + 1$. Calcule $2f(x)$ y $1/3f(x)$

17. En las funciones siguientes determine la función cociente y calcule el dominio.

a. $f(x) = x + 1$; $g(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^3}$

b. $f(x) = x - 2$; $g(x) = x + 7$

c. $g(x) = x^2 - 1$; $k(x) = 3x^2 - 4$

d. $h(x) = 2x^2 + 5x - 3$; $k(x) = x^2 - 1$

e. $f(x) = x^2 - x$; $g(x) = x + 1$

f. $g(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$; $h(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 4}$

g. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + x - 6}$; $h(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 8x - 12}$

RESUMEN

Una función es monótona creciente si:

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Otra forma de determinar si una función es creciente en un intervalo dado es utilizando la siguiente fórmula, cuyo resultado debe ser positivo.

$$f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = +$$

Una función es estrictamente creciente si:

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Una función es monótona decreciente si:

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Otra forma de determinar si una función es decreciente en un intervalo dado es utilizando la siguiente fórmula, cuyo resultado debe ser negativo.

$$f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -$$

Una función es estrictamente decreciente si:

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Una función es monótona a trozos si en partes es creciente y en otras es decreciente.

FUNCION CONSTANTE

Una función es constante si todos los elementos del dominio de A tienen la misma imagen en codominio B ($f(x) = k \wedge k \neq 0$)

FUNCION LINEAL

Una función lineal es aquella que está representada por una línea recta. En símbolos se representa, así:

$f(x) = ax + b$; $a \wedge b$ = constantes

FUNCION PAR

Una función es par, sí y sólo sí:

$\forall\, x \in A,\ f(x) = f(-x)$ ó

$(x,y) \in f \Rightarrow (-x,y) \in f$

Luego la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje "y".

FUNCION IMPAR

Una función es impar sí y sólo sí:

$\forall\, x \in A,\ f(x) = -f(x)$ ó

$(x,y) \in f \Rightarrow (-x, -y) \in f$

Luego la gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

FUNCION EXPONENCIAL

$f(x) = a^x$

FUNCION LOGARITMICA

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

OPERACIONES CON FUNCIONES

Las operaciones que realizamos con funciones son:

Función Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall\, x \in R$

Función Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x),\ \forall\, x \in R$

Función Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \forall\, x \in R$

Función Cociente: $(f/g)(x) = f(x)/g(x),\ \forall\, x \in R$

VALORE SUS CONOCIMIENTOS
No. 3

OBJETIVO 09	Establecer la diferencia entre función monótona creciente y decreciente.

A. INSTRUCCION ESPECIFICA: Escriba en el paréntesis correspondiente una (V) si el enunciado es verdadero o una (F) si es falso.

1. ( ) Las funciones que en parte son crecientes y en parte decrecientes se llaman monótonas a trozos.

2. ( ) Una función es monótona creciente si:

   $\forall\ x_1,\ x_2 \in A \land x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3. ( ) Una función constante se representa por: $f(x) = k$

4. ( ) Al aplicar la fórmula:

$$f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

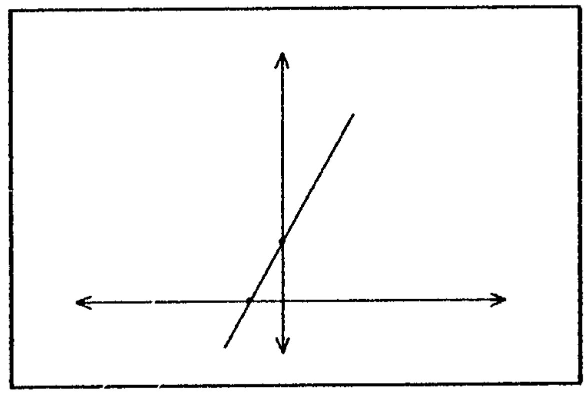
   Si el resultado es negativo, la función es creciente.

5. ( ) Una función f es decreciente en un intervalo dado si:

   $\forall\ x_1,\ x_2 \in [a,b] \land x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

6. ( ) Una función lineal está definida por: $f(x) = ax + b$

7. ( ) El gráfico de una función lineal de la forma $y = ax$ es:



B. INSTRUCCION ESPECIFICA: Marque con una X la alternativa correcta.

8. Una de las siguientes fórmulas se utiliza en la identificación de funciones crecientes o decrecientes.

a. $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

b. $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

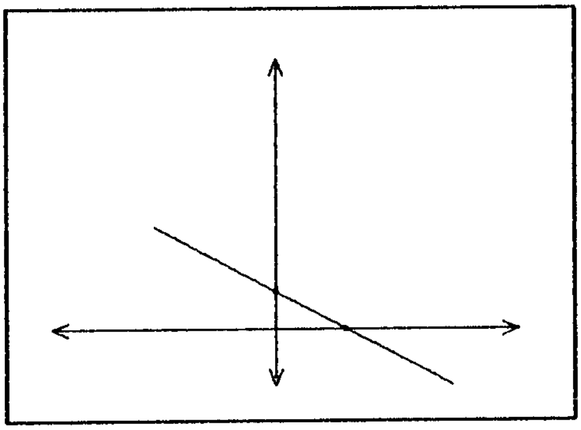
c. $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

d. $$\frac{f(x_1) \cdot f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

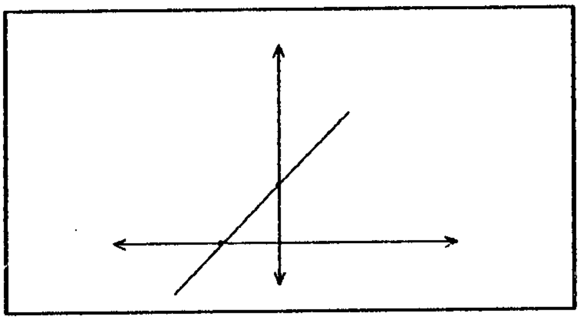
C. INSTRUCCION ESPECIFICA: Encierre en un círculo los literales que expresen lo correcto:

9. Uno de los gráficos siguientes representa una función constante:

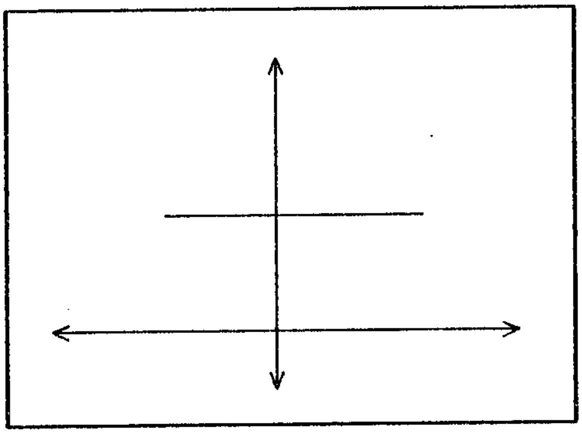
a. (   )



b. (   )



c. (   )



10. Las funciones crecientes definidas en los reales positivos son:

a. $f(x) = -2x + 7$

b. $g(x) = 3x + 1$

c. $h(x) = 5x - 3$

d. $f(x) = -6x + 1$

11. Las funciones decrecientes definidas en los reales positivos son:

    a. $f(x) = -2x + 7$

    b. $f(x) = 3x - 5$

    c. $g(x) = 9x + 7$

    d. $h(x) = -x + 6$

    e. $g(x) = -3x + 1$

D. INSTRUCCION ESPECIFICA: Represente gráficamente:

12. La temperatura durante las horas que ha continuación se indica.

13 hoo	T = 20°C	14 hoo	T = 21°C
15 hoo	T = 19°C	16 hoo	T = 19°C
17 hoo	T = 15°C	18 hoo	T = 13°C

y las funciones lineales:

13. $f(x) = 2x - 3$

14. $h(x) = 3x + 1$

15. $g(x) = 4$

OBJETIVO 10	Determinar si una función real es par, impar, exponencial o logarítmica, en sus diferentes formas.

A. INSTRUCCION ESPECIFICA: Tache con una línea oblicua la V o F según corresponda.

16. V F Una función es par si $f(x) = f(-x)$

17. V F Si los exponentes de la variable son pares la función es impar.

18. V F El gráfico de una función par es simétrica con respecto al eje y.

19. V F Una función es impar si $f(-x) = f$

20. V F El gráfico de una función impar es simétrica con respecto al origen.

21. V F Una función puede ser ni par ni impar

22. V F Una función es exponencial sí y sólo sí:

$f = \{(x,y)/y = a^x,\ x \in R\}$

23. V F El gráfico que corresponde a funciones exponenciales pasa por el punto (0,1)

24. V F El gráfico de la función exponencial se mantiene siempre bajo el eje de las equis (x)

25. V F $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

26. V F $y = x^a$ define una función exponencial

27. V F El dominio de la función logarítmica es el conjunto de los números reales.

28. V F Si $y = \log_a x \iff x = a$ define una función logarítmica.

29. V F La función logarítmica es contínua?

30. V F $\log_a a = a$

B. INSTRUCCION ESPECIFICA: Sombree el literal que determine la alternativa correcta.

31. La función par es:

a. $f(x) = 2x^2 - x^4$

b. $f(x) = x^4 - x^2 - x - 1$

c. $f(x) = x^3 + 2x$

d. $f(x) = x$

32. En la ecuación exponencial $5^{2x-1} = 125$, el valor de (x) que permite verificar la identidad es:

a. -2

b. 2

c. -3

d. 3

33. La ecuación exponencial que tiene a 4 como valor de (x) es:

a. $3^{x+1} = 729$

b. $2^{3x+1} = 128$

c. $3^{2x-1} = 2187$

d. $5^{x-2} = 625$

34. El valor que corresponde a la base "a" en la función logarítmica $\log_a 16 = 2$, es:

a. 4

b. -4

c. 3

d. 2

35. El valor de "x" en la función logarítmica $\log_5 x = 2$ es:

a. 20

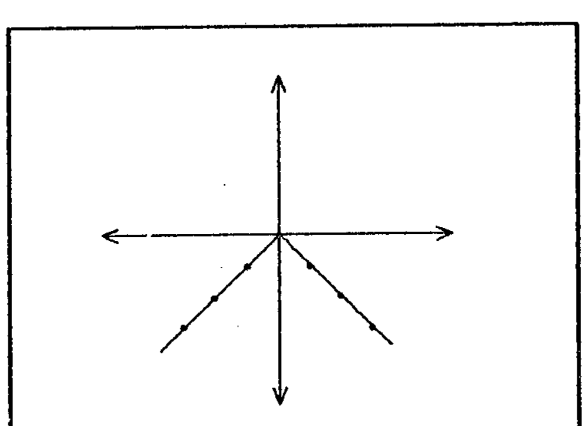
b. 30

c. 25

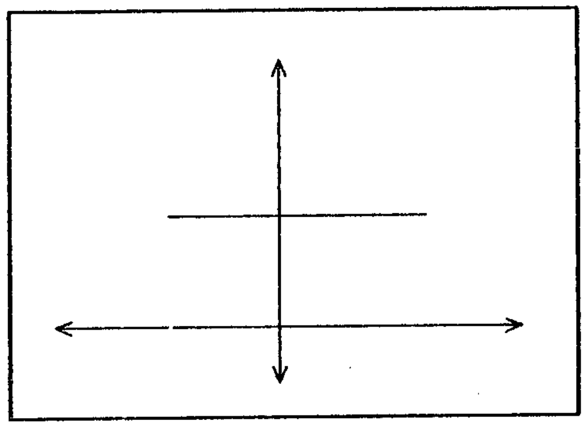
d. 35

36. El gráfico de una función impar es:

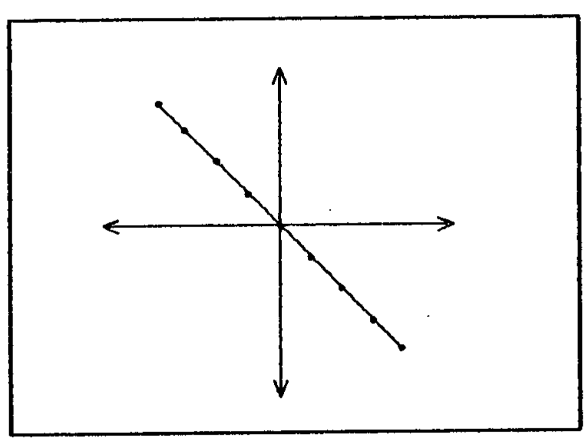
a.



b.

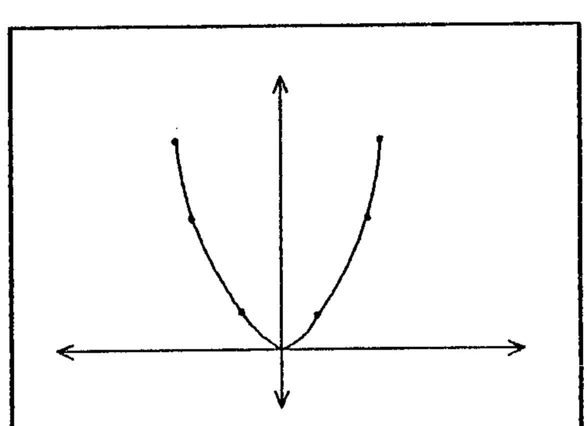


c.

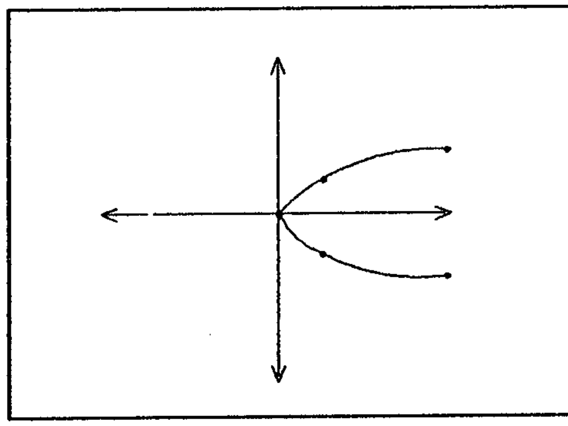


37. El gráfico de una función par es:

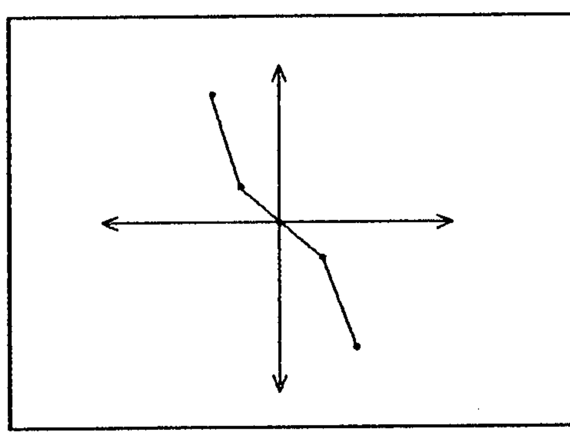
a.



b.



c.



C. INSTRUCCION ESPECIFICA: Demuestre analíticamente si las siguientes funciones son par o impar, si están definidas de R--->R

38. $f(x) = 9 - x^2$

39. $f(x) = 6x + 7$

40. $f(x) = 3x^3 - x$

D. INSTRUCCION ESPECIFICA: Trace la gráfica de la siguiente función:

41. $f(x) = 6^{-x}$

E. INSTRUCCION ESPECIFICA: Frente a cada función logarítmica escriba la función exponencial equivalente.

42. $\log_{1/4} 4 = -1$

43. $\log_{10} 1000 = 3$

44. $\log_{2} 1/16 = -4$

45. $\log_{10} x = y$

OBJETIVO 11	Realizar operaciones con funciones y representar gráficamente

A. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Escriba una "x" en el paréntesis que corresponda a la respuesta correcta:

46. La función suma entre f y g definida de R--->R, es:
$f(x) = 3x$; $g(x) = 4x + 2$

a. ( ) $7x + 1$

b. ( ) $7x + 2$

c. ( ) $7 + 2x$

47. Si la suma de $(f + g) = 2x^2 + 3x - 5$ y $f(x) = x^2 - 2x + 3$, entonces $g(x)$ es:

a. ( ) $g(x) = x^2 + 5x - 8$

b. ( ) $g(x) = 5x - 8$

c. ( ) $g(x) = x^2 - 5x + 8$

48. El dominio de la función f+h definida por las funciones:
$f(x) = 2x + 1$ y $h(x) = x^2$ es:

a. ( ) R^-

b. ( ) R

c. ( ) R^+

49. El dominio de la función producto g.h si:
$g(x) = 2x - 3$, $h(x) = (x+3)/(x-2)$ es:

a. ( ) R - {2}

b. ( ) R

c. ( ) R - {-2}

50. La función diferencia entre $f(x) = 3x$ y $g(x) = 4x + 2$ definida de R--->R es:

a. ( ) $(f - g)(x) = x - 2$

b. ( ) $(f - g)(x) = - x - 2$

c. ( ) $(f - g)(x) = - x + 2$

51. Si la diferencia de $f - g = 2x^2 + 3x - 5$ y $f(x) = x^2-2x+3$, entonces $g(x)$ es:

a. ( ) $g(x) = - x^2 - 5x + 8$

b. ( ) $g(x) = x^2 - 5x + 8$

c. ( ) $g(x) = x^2 - 5x - 8$

52. La representación simbólica de la diferencia de funciones es:

a. ( ) $(f - g)(x) = g(x) - x, \forall x \in R$

b. ( ) $(f - g)(x) = f - g, \forall x \in R$

c. ( ) $(f - g)(x) = f(x) - g(x), \forall x \in R$

53. El dominio de la función $f - h$ definida por las funciones:
$f(x) = 2x + 1$ y $h(x) = x^2$ es:

a. ( ) R^-

b. ( ) R^+

c. ( ) R

54. La solución que corresponde a la función producto de:
$f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 2x + 10$ es:

a. ( ) $6x^2 + 34x + 20$

b. ( ) $17x^2 + 3x + 10$

c. ( ) $10x^2 + 3x + 17$

55. Sea la función $g(x) = 4x + 1$, entonces $5g(x)$, es:

a. ( ) $5x + 20$

b. ( ) $20x + 5$

c. ( ) $20x - 5$

56. La solución que corresponde a la función cociente de $f(x)=x^2+4$ y $g(x)=x-2$, es:

a. ( ) $x - 2$

b. ( ) $x + 2$

c. ( ) $x^2 + 2$

57. El dominio de la función cociente, $g(x) = x^2 - 4$ y $h(x)=x-3$ es:

a. ( ) $R - \{-3\}$

b. ( ) $R - \{3\}$

c. ( ) $R - \{0\}$

B. INSTRUCCION ESPECIFICA: Dadas las funciones: $f(x) = 3x + 10$; $g(x) = - 5x + 2$ determine:

58. $(f + g)(x) =$

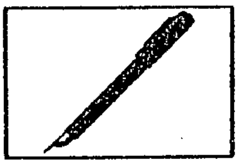
59. El dominio de $(f + g)(x) =$

60. Represente gráficamente la función suma.

C. INSTRUCCION ESPECIFICA: Resuelva los siguientes ejercicios:

61. Con las funciones: $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = 3x^2 - 2x - 2$. Determine $(f.g)(x)$.

62. Dadas las funciones: $h(x) = 2/(x - 5)$ y $k(x) = (x+2)/(x-3)$. Calcule la función cociente $(h/k)(x)$



CLAVE DE RESPUESTAS

Compare las respuestas de la evaluación con las del Solucionario.

<u>Objetivo 9</u>

A.

1. (V)

2. (F) Es falsa porque una función monótona es creciente si:
$\forall\ x_1,\ x_2 \in A \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3. (V)

4. (F) Si se aplica la fórmula:

$$f=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

y el resultado es negativo la función es decreciente.

5. (V)

6. (V)

7. (F) Es falsa porque la gráfica de una función lineal de la forma y = ax pasa por el origen.

B.

8. a, b, c , d

9. a, b, c

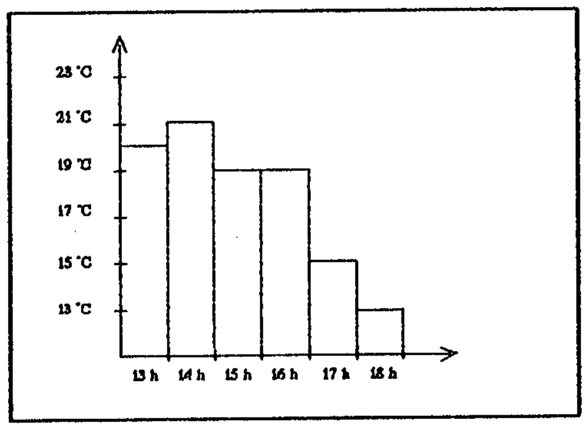
C.

10. a, b, c, d

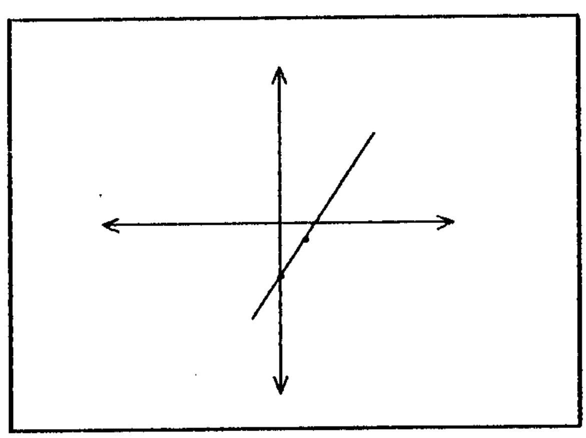
11. a, b, c, d, e

D.

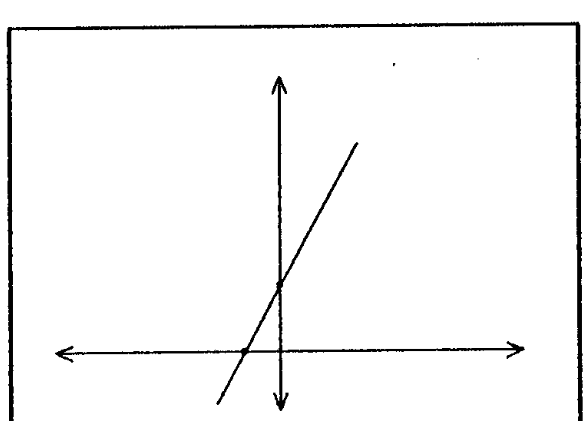
12.



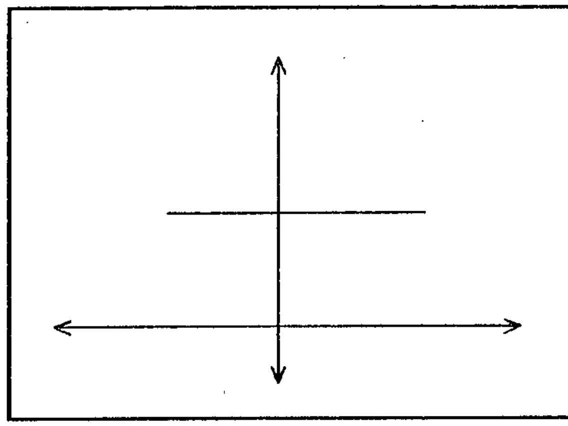
13. f(x) = 2x - 3



14. h(x) = 3x + 1



15. $g(x) = 4$



Objetivo 10

A.

16. V F

17. V F Porque una función es par cuando sus exponentes son pares.

18. V F

19. V F Porque una función es impar si $f(-x) = - f(x)$

20. V F

21. V F

22. V F

23. V F

24. V F El gráfico de una función exponencial se mantiene siempre sobre el eje de las equis (x)

25. V F

26. V F La fórmula que define una función exponencial es:
$f(x) = a^x$

27. V F Porque su dominio es el conjunto de los números positivos (N)

28. V F Porque una función logarítmica se define por:
$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

29. V F

30. V F Porque el logaritmo de la base es 1.

B.

31. a, b, c, d

32. a, b, c, d

33. a, b, c, d

34. a, b, c, d

35. a, b, c, d

36. a, b, c, d

37. a, b, c

C.

38. $9 - x^2$

Demostramos si la función es par.

$f(x) = f(-x)$

$9 - x^2 = 9 - (-x)^2$

$9 - x^2 = 9 - x^2$

$\therefore$ La función es par.

39. $6x + 7$

Demostramos si la función es impar.

$f(-x) = -f(x)$

$6(-x) + 7 = -(6x + 7)$

$-6x + 7 \neq -6x - 7$ pues $f(-x) \neq -f(x)$

$\therefore$ La función no es impar.

Demostramos si la función es par.

$f(x) = f(-x)$

$6x + 7 = 6(-x) + 7$

$6x + 7 = -6x + 7$

∴ La función no es par.

La función dada no es par ni impar.

40. $3x^3 - x$

Demostramos si la función es impar.

$f(-x) = -f(x)$

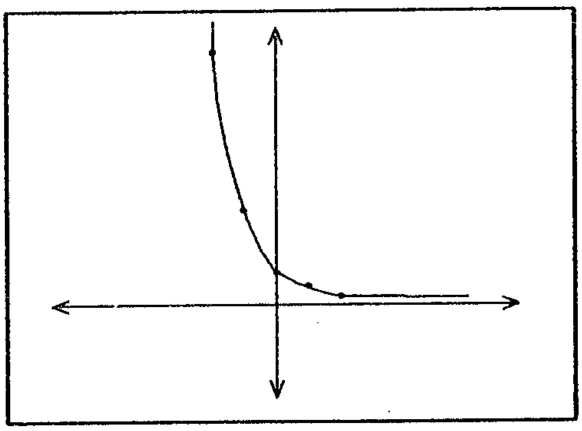
$3(-x)^3 - (-x) = -(3x^3 - x)$

$-3x^3 + x = 3x^3 + x$

∴ La función es impar.

D.

41.



E.

42. $(1/4)^{-1} = 4$

43. $10^3 = 1000$

44. $(2)^{-4} = 1/16$

45. $y(x = 10^y)$

<u>Objetivo 11</u>

A.

46. a ( ), b (x), c ( )

47. a (x), b ( ), c ( )

48. a ( ), b (x), c ( )

49. a (x), b ( ), c ( )

50. a ( ), b (x), c ( )

51. a (x), b ( ), c ( )

52. a ( ), b ( ), c (x)

53. a ( ), b ( ), c (x)

54. a (x), b ( ), c ( )

55. a ( ), b (x), c ( )

56. a (x), b ( ), c ( )

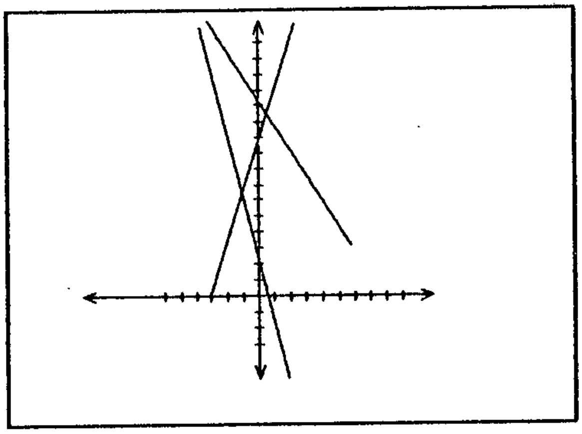
57. a ( ), b (x), c ( )

B.

58. $(f + g)(x) = -2x + 12$

59. Dom $(f + g) = R$

60.



C.

61. $(f \cdot g)(x) = 3x^4 - 2x^3 - 29x^2 + 18x + 18$

62. $(h/k)(x) = x^2 - 3x - 10$

COMENTARIO

Al finalizar el estudio de los contenidos de las tres unidades que conforman el módulo III, es necesario analizar los resultados tanto parciales como de módulo.

Después del estudio de cada unidad confiamos en que los objetivos planteados hayan alcanzado el punto de corte necesario para su aprobación, esto es el 70% en cada uno de ellos. Si por el contrario no alcanzó el porcentaje indicado debe usted reforzar sus conocimientos, procediendo a revisar nuevamente los temas correspondientes a los objetivos que no logró acreditar.

La autoevaluación propuesta al final del módulo III, comprende los aspectos más importantes y básicos para que le permitan continuar con el estudio de las siguientes unidades.

Le recordamos no pasar al siguiente módulo si no está seguro de los aprendizajes conseguidos, ya que el carácter sistemático de la asignatura le impide comprender los temas que se estudiarán en el módulo posterior, lo cual le permitirá realizar con éxito la prueba presencial.

BIBLIOGRAFIA

1. ALLENDOERFER, Carl B. y Cletus Oakley (1976) Fundamentos de Matemáticas Universitarias, Colombia., Edit. Graw-Hill, 633 p.

2. LEITHOLD, Louis: (1994) Matemáticas previas al cálculo. México, Edit. Harla., 898 p.

3. L GALDOS (1989) Algebra, Madrid, 542 p.

4. GARCIA L. Balbino y otros. (1982) Matemáticas BUP 2, España, Edit. Luis Vives, Saragoza, 240 p.

5. LARA, Jorge y Jorge Arrobo: Análisis matemático., Quito., Edit. Universidad Central del Ecuador., 1982, 790 p.

6. LOVAGLIA, Forence y otros Algebra, 1978, México, Edt. Harla, 387 p.

7. NEGRO, Adolfo y otros: (1979) Matemática II, Madrid, Edit Alhamha, 358 p.

8. PINSON, Alvaro: Matemática Curso Preuniversitario, Loja, Edit. UTPL.

9. PROAÑO-VITERI, Galo Ramiro: (1992) Funciones Reales I., Quito., Edit. Provideti Editores, 1982, 226 p.

10. SAENZ, Rolando y otros: (1989) Matemáticas para el ciclo diversificado, segunda parte., Quito., 215 p.

11. SAENZ, Rolando y otros: (1989) Fundamentos de Matemática., Quito., impreso en Ecuador, 264 p.

12. SILVA, Juan y otros Matemáticas, México, Edit Limusa, S.A. de C.V. 1990.

13. WILLS, Darío y otros:(1976) Matemática moderna estructurada. Vol. 6., Colombia., Edit. Norma., 252 p.

MODULO 4 OPERACIONES BINARIAS

INTRODUCCION DEL CUARTO MODULO

En el tratamiento del módulo III se realizó el estudio de las funciones reales y su aplicación en las asignaturas como: Algebra, Trigonometría, Geometría Analítica y fundamentalmente en cálculo donde el concepto de función ocupa un lugar central.

Como culminación del presente documento autoinstruccional presentamos a usted el módulo final de nuestro estudio, que comprende el conocimiento y ejercitación de: Operaciones Binarias, definiciones básicas y sus propiedades, son características de este documento: la claridad y sencillez en su explicación, el uso adecuado del lenguaje matemático, la simbología y la elaboración der matrices con la ejercitación y desarrollo de los ejercicios propuestos como la autoevaluación proporcionará en usted una actividad reflexiva y creativa donde el razonamiento es indispensable para alcanzar el fin que se persigue.

Al iniciar el estudio que hoy estamos concluyendo, nos propusimos metas quizá un tanto ambiciosas con el objeto de que la preparación que usted adquiera llenen nuestras aspiraciones y sea basta para vuestro ejercicio profesional y permita su promoción para continuar sin dificultad el estudio de lsa asignaturas de los ciclos superiores.

Los logros que a través de estas páginas se hayan cristalizado, forjarán en usted un profesional con toda la capacidad para asumir un reto: la instrucción y formación de nuevas generaciones.

OBJETIVO 4	Aplicar definiciones, reglas y leyes en las operaciones binarias.

UNIDADES		SEGMENTOS	
12.	Nociones Básicas	12.1.	Concepto
		12.2.	Matrices
		12.3.	Dominio de una Operación
13.	Operaciones en los Naturales (N)	13.1.	Máximo y Mínimo
		13.2.	Mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
		13.3.	Potencia
14.	Operaciones con Conjuntos	14.1.	Unión
		14.2.	Intersección
		14.3.	Diferencia Normal
		14.4.	Diferencia Simétrica
15.	Operaciones Binarias: Propiedades	15.1.	Conmutativa
		15.2.	Asociativa
		15.3.	Elemento Neutro
		15.4.	Elemento Simétrico

UNIDAD 12: NOCIONES BASICAS	12.1. Concepto 12.2. Matrices 12.3. Dominio de una Operación

▲	p	q	R	S	T
p					
q					
R					
S					
T				R	

OBJETIVO 12	Determinar si un conjunto de números es completo o incompleto respecto de una operación.

12.1. CONCEPTO:

En todas las actividades del hombre es muy común emplear las palabras: sumar, restar, multiplicar, dividir, operar, etc. Siempre que realizamos cualquier operación se nos da dos números al cual le hacemos corresponder un tercer número, al que lo llamamos resultado de la operación. Así por ejemplo si tenemos 15 y 5 se obtiene 20, 10, 75, 3, etc. que es el resultado de la operación respectiva.

El par de números que se dan, en general, tienen que estar ordenados especialmente para la resta y división, no teniendo importancia el orden en la suma y la multiplicación.

De la misma forma, para realizar cualquier tipo de operación, es necesario conocer con anterioridad cual es la ley que va a permitir desarrollar tal operación la misma que dará lugar a la clasificación de las operaciones y a identificar sus diferencias.

De lo anterior podemos deducir el concepto de la palabra operación diciendo que:

Es una correspondencia o relación entre un par ordenado de números que asocia otro número.

Por lo tanto y según Ignacio Uranga y otros definimos a una operación binaria, así:

DEFINICION:

> dado un conjunto A, no vacío, consideremos el producto cartesiano AxB. Llamaremos operación en A, a toda aplicación de A x A en A.
> A los componentes del par lo llamaremos datos, y a la imagen elemento compuesto o resultado.

A estas operaciones se acostumbra a representar en forma más general con la simbología: +, . , : , U, ∩ Ejemplo x * y , lo que se lee "x compuesto con y" ó "x operado con y".

Una operación también la podemos representar mediante tablas en las que se ubica en un lado los pares ordenados y en el otro su respuesta según la ley indicada, así por ejemplo, la tabla de la suma, resta, multiplicación y división se podría escribir así:

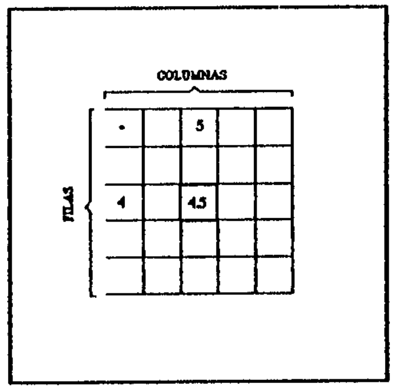
+		-		x		:	
(2,1)	3	(2,1)	1	(2,1)	1	(2,1)	2
(4,2)	6	(4,2)	2	(4,2)	8	(4,2)	2
(10,5)	15	(10,5)	5	(10,5)	50	(10,5)	2
(9,3)	12	(9,3)	6	(9,3)	27	(9,3)	3
(8,4)	12	(8,4)	4	(8,4)	32	(8,4)	2

Cuando en un problema se utilizan dos leyes distintas es necesario emplear dos signos diferentes con el objeto de distinguir las operaciones.

12.2. MATRICES

Una forma muy útil de representar una operación es mediante un cuadro o matriz denominado tabla de operación, tabla Pitagórica o tabla de doble entrada.

Dicha tabla está formada por filas y columnas, en cada fila y columna colocamos un elemento y en la casilla en que se cortan se escribe el resultado de la operación realizada.



Al construir un matriz es importante tener presente lo siguiente:

a. Los elementos del conjunto se escriben en la fila superior de izquierda a derecha y en el mismo orden que se dan.

b. Los elementos del conjunto también se escriben en la primera columna por la izquierda de arriba hacia abajo y en el mismo orden que se dan.

c. En la primera casilla superior izquierda se escribe el símbolo de la operación.

d. El resultado de la operación está ubicado en la casilla donde se interseca la fila de la primera componente con la columna de la segunda componente.

e. Las tablas se construyen generalmente para conjuntos finitos.

f. Dentro de la tabla únicamente existirán elementos del conjunto dado.

g. Para encontrar el resultado de una determinada operación, localizaremos al primer elemento del conjunto en la columna de la izquierda, y al segundo, en la primera fila. Así por ejemplo, en la siguiente tabla el resultado de la operación indicada está dado por la intersección de la fila en la cual aparece c, con la columna en la que se encuentra b. Encontrándose en la intersección la letra a.

*	a	b	c
a			
b			
c		a	

Lo que se expresa así:

$c * b = a$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Elabore la tabla para la operación + con el conjunto:

   $A = \{1,3,5,7,9\}$

+	1	3	5	7	9
1	2	4	6	8	10
3	4	6	8	10	12
5	6	8	10	12	14
7	8	10	12	14	16
9	10	12	14	16	18

Es decir:

$1 + 1 = 2$	$5 + 1 = 6$	$7 + 1 = 8$
$1 + 3 = 4$	$5 + 3 = 8$	$7 + 3 = 10$
$1 + 5 = 6$	$5 + 5 = 10$	$7 + 5 = 12$
$1 + 7 = 8$	$5 + 7 = 12$	$7 + 7 = 14$
$1 + 9 = 10$	$5 + 9 = 14$	$7 + 9 = 16$

En consecuencia no es una operación binaria, por cuanto sus elementos no pertenecen al conjunto dado A.

2. Construya la tabla para la operación " . " con el conjunto:

   $B = \{0,1,2\}$

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

Lo que significa:

0 . 0 = 0   1 . 0 = 0   2 . 0 = 0

0 . 1 = 0   1 . 1 = 1   2 . 1 = 2

0 . 2 = 0   1 . 2 = 2   2 . 2 = 4

∴ La operación " . " no es binaria porque 4   B.

3. Elabore la tabla para la operación " * " con los elementos del conjunto:

C = {1,a,2,b}

*	1	a	2	b
1	1	a	2	b
a	a	a	b	b
2	2	b	a	1
b	1	a	2	b

Lo que significa:

1 * 1 = 1   a * 1 = a   2 * 1 = 2

1 * a = a   a * a = a   2 * a = b

1 * 2 = 2   a * 2 = b   2 * 2 = a

1 * b = b   a * b = b   2 * b = 1

Observamos que cumple con las condiciones de una operación binaria, por lo tanto {c,*} es una operación binaria.

4. Con el conjunto D = {a,e,i,o,u} construir la tabla correspondiente a la operación " ▲ "

▲	a	e	i	o	u
a	a	e	i	o	u
e	e	e	a	i	o
i	i	a	i	e	u
o	o	i	e	o	e
u	u	a	u	e	u

Lo que se expresa así:

a ▲ a = a   e ▲ a = e   i ▲ a = i

a ▲ e = e   e ▲ e = e   i ▲ e = a

a ▲ i = i   e ▲ i = a   i ▲ i = i

a ▲ o = o   e ▲ o = i   i ▲ o = e

a ▲ u = u   e ▲ u = o   i ▲ u = u

Observamos que es una operación binaria.

En los ejemplos 3 y 4 observamos que los elementos de la respuesta no tienen ningún orden, es decir, en las casillas escribimos elementos del conjunto dado como se crea conveniente; todos o algunos o uno solo, con lo que queda definida la operación.

12.3. DOMINIO DE UNA OPERACION

(Varsavsky, Oscar, 1973, Tomo I, Pág. 135)

Se puede definir muchas operaciones entre números y aún entre objetos que no son números.

Si tenemos un conjunto cualquiera A, que no sea vacío, cualquier función T que haga corresponder a cada par ordenado de elementos de A otro elemento de A, es una operación de A o entre los elementos de A. El alcance de T tiene que estar formado por todos los elementos de A; el rango es A. La imagen, como veremos puede ser o no todo el rango. Cuando no se dice nada sobre el dominio, se supone que coincide con el alcance, o sea que la operación se puede efectuar entre todos los pares ordenados de elementos de A. Pero no siempre es así: si A es el conjunto de los números naturales N, la división exacta tiene un dominio más chico que su alcance. Hay pares ordenados de números (ejemplo: 10, 3) a los que no le corresponde como resultado un número natural. En casos así diremos que se trata de una operación incompleta. La división exacta es, pues, incompleta en N.

Suma y multiplicación en N tienen dominio = alcance. La resta es incompleta en N.

Hablamos de operación binaria porque el dominio está formado por pares. Hay también operaciones ternarias cuyo dominio está formado por ternas, etc.

Sea T una operación binaria en A, es decir, T es una función de rango = A y alcance = {pares ordenados de elementos de A}. Recordemos que a este conjunto lo hemos llamado A x A. Alcance de T = A x A.

Siendo T una función, si su valor en el par a,b es c, deberíamos escribir:

$$T\ (a\ .\ b) = c$$

Pero es costumbre poner el símbolo de la operación entre dos elementos del par:

$$a\ T\ b = c$$

(a la izquierda de T va siempre el que es primero) como su fuera una relación entre a y b. Atención y no confundirse: si T fuera una relación, aTb sería algo verdadero o falso, como "a es tío de b". En cambio si es una operación, como +, a+b no es ni cierto ni falso. Lo que es cierto o falso es que a+b=c. La relación es entre c y el par (a,b).

$$a\ T\ b = c$$

se lee: c es el resultado de aplicar la operación T al par a,b, o de <u>operar</u> a con b.

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

Demuestre si las siguientes operaciones son completas o no en el donjunto de los naturales (N).

a. Adición $a + b = c$
b. Resta $a - b = c$
c. Multiplicación $a \cdot b = c$
d. División $a : b = c$

DESARROLLO:

Para demostrar las operaciones indicadas se elige pares de elementos del conjunto dado, y se verifica con cada una de las operaciones.

Si el resultado es un elemento de un mismo conjunto, la operación es <u>completa</u> y si el resultado no es un elemento del conjunto dado la operación es <u>incompleta</u>.

a. <u>Adición</u>

Sean los pares (7,4) y (8,10)

$$a + b = c$$
$$7 + 4 = 11 \in N$$
$$8 + 10 = 18 \in N$$

Entoces: →

La adición en el conjunto de los naturales es una operación completa cuyo dominio es el conjunto de los naturales.

b. Resta

$$\begin{aligned} a - b &= c \\ 7 - 4 &= 3 \in N \\ 8 - 10 &= -2 \in N \end{aligned}$$

Entonces:

La resta no está definida en todo número natural. Si queremos que el resultado sea un elemento de N la primera componente debe ser mayor que la segunda. Por lo tanto la resta es una operación incompleta en el conjunto indicado. En consecuencia el dominio de esta operación es retringido.

c. Multiplicación

$$\begin{aligned} a \,.\, b &= c \\ 7 \,.\, 4 &= 28 \in N \\ 8 \,.\, 10 &= 80 \in N \end{aligned}$$

Entonces:

La multiplicación en el conjunto de los naturales es una operación completa cuyo dominio es el conjunto de los naturales.

d. División

$$\begin{aligned} a : b &= c \\ 7 : 4 &= 7/4 \in N \\ 8 : 10 &= 4/5 \in N \end{aligned}$$

Entonces:

> La división inexacta en el conjunto de los números naturales es una operación incompleta, por lo tanto su dominio es restringido.

Pero si tomamos pares como por ejemplo: (10,2) (6,3), donde la primera componente es múltiplo de la segunda, entonces la división es posible en el conjunto de los naturales.

$$a : b = c$$
$$10 : 2 = 5 \in N$$
$$6 : 3 = 2 \in N$$

2. Demuestre si las siguientes operaciones son completas o incompletas, en el conjunto de los números racionales (Q).

a. Adición $a + b = c$
b. Resta $a - b = c$
c. Multiplicación $a \cdot b = c$
d. División $a : b = c$

DESARROLLO:

Consideremos los pares ordenados (3/4,-1/2) y (5,8/3)

a. <u>Adición</u>

$$a + b = c$$

$3/4 + (-1/2) =$ $\qquad$ $5 + 8/3 =$

$3/4 - 1/2 = 1/4 \in Q$ $\qquad$ $\dfrac{15 + 8}{3} = \dfrac{23}{3} \in Q$

b. <u>Multiplicación</u>

$$a \cdot b = c$$

$(3/4)(-1/2) = -3/8 \in Q$ $\qquad$ $(5)(8/3) = 40/3 \in Q$

c. <u>Resta</u>

$$a - b = c$$

$3/4 - (-1/2) =$ $\qquad$ $5 - 8/3 =$

$3/4 + 1/2 = 5/4 \in Q$

$$\frac{15 - 8}{3} = \frac{7}{3} \in Q$$

CONCLUSION

La adición, la multiplicación y la resta en el conjunto de los números racionales son operaciones completas, siendo su dominio el conjunto de Q.

d. <u>División</u>

$$a : b = c$$

$3/4 : (-1/2) =$

$3/4 \times (2/1) = -6/4 \in Q$

$5 : 8/3 =$

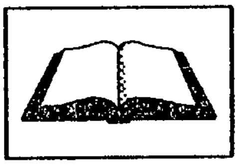
$5 \times 3/8 = 15/8 \in Q$

Con la relación a los pares que hemos tomado y al realizar la operación observamos que la división es completa. Pero si tomamos los pares (0,-3/4) y (-3/4,0) y al demostrar vemos que la división en el conjunto de los Q es incompleta, así:

$0 : 3/4 = 0 \in Q$

$-3/4 : 0 = ?\quad Q$

Por lo tanto el dominio de la división cuando está definida en el conjunto de los racionales es restringida.



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 12

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos:

1. Verifique si las siguientes operaciones son completas o no, en el conjunto de los números irracionales y enteros. Luego indique el dominio en cada operación.

   a. $a + b = c$

   b. $a - b = c$

   c. $a \, . \, b = c$

   d. $a : b = c$

2. Sea el conjunto de los números enteros. Siendo a y b $\in$ Z ¿Cuáles de las siguientes expresiones definen operaciones en el conjunto dado?

   a. $a \blacktriangle b = b$

   b. $a \blacktriangle b = 3a + 2b$

   c. $a * b = a - b$

   d. $a \blacksquare b = a/b$

   e. $a : b = \sqrt{a^3 + b^3}$

3. Demuestre mediante una matriz si la adición en el conjunto de los naturales pares e impares es una operación binaria.

UNIDAD 13: OPERACIONES EN LOS NATURALES (N)	13.1. Máximo y Mínimo 13.2. Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor. 13.3. Potencia

*	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	3	5	7
5	5	5	5	7
7	7	7	7	7

$\Longrightarrow \boxed{5 \vee 7 = 7}$

$\boxed{5 \wedge 7 = 5}$

OBJETIVO 13	Elaborar tablas para las operaciones: máximo, mínimo; máximo común divisor, mínimo común múltiplo y potencia.

13.1. MAXIMO Y MINIMO

A más de las operaciones descritas anteriormente podemos inventar muchas operaciones en el conjunto de los naturales; basta decir, por cualquier medio o forma el resultado para cada par de números. Así podemos hablar de operaciones como: mínimo, máximo, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, potencia, etc.

13.1.1. MAXIMO

Una de las operaciones de fácil resolución es la que llamaremos máximo. En la cual se hace corresponder a todo par de números naturales el mayor de los dos y si los números son iguales el mismo número. Su símbolo es "V".

El máximo entre los siguientes pares: (10,7),(20,20),(6,8) es:

10 V 7 = 10

20 V 20 = 20

6 V 8 = 8

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Construya una tabla o matriz para la operación máximo, definida en el conjunto: A = {1,3,5,7}

V	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	3	5	7
5	5	5	5	7
7	7	7	7	7

2. Elabore una tabla o matriz para la operación máximo, definida en el conjunto de los múltiplos de 3 menores a 21.

V	3	6	9	12	15	18
3	3	6	9	12	15	18
6	6	6	9	12	15	18
9	9	9	9	12	15	18
12	12	12	12	12	15	18
15	15	15	15	15	15	18
18	18	18	18	18	18	18

3. Construya una tabla o matriz para la operación máximo definida en el intervalo [-5, 0]

V	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	-5	-4	-3	-2	-1	0
-4	-4	-4	-3	-2	-1	0
-3	-3	-3	-3	-2	-1	0
-2	-2	-2	-2	-2	-1	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1	0
0	0	0	0	0	0	0

4. Genere una tabla o matriz para la operación máximo definida en el conjunto $A = \{x \in N \text{ pares}, 10 \geq x \geq 2\}$

$$A = \{2,4,6,8,10\}$$

V	2	4	6	8	10
2	2	4	6	8	10
4	4	4	6	8	10
6	6	6	6	8	10
8	8	8	8	8	10
10	10	10	10	10	10

5. Construir una tabla o matriz para la operación máximo, definida en el conjunto $P = \{-1,0,1\}$

V	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

13.1.2. MINIMO

Otra operación de resolución inmediata es la denominada mínimo. En la que se hace corresponder a todo par de números naturales el menor de los dos, y si son iguales, el mismo número. Su símbolo es "$\wedge$"

Ejemplo:

El mínimo entre los siguientes pares: (2,3),(5,5),(8,1), es:

$2 \wedge 3 = 2$

$5 \wedge 5 = 5$

$8 \wedge 1 = 1$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Construya una tabla o matriz para la operación mínimo, definida en el conjunto A = {1,3,5,7}

$\wedge$	1	3	5	7
1	1	1	1	1
3	1	3	3	3
5	1	3	5	5
7	1	3	5	7

2. Haga una tabla o matriz para la operación mínimo, definida en el intervalo [-5,0]

$\wedge$	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
-4	-5	-4	-4	-4	-4	-4
-3	-5	-4	-3	-3	-3	-3
-2	-5	-4	-3	-2	-2	-2
-1	-5	-4	-3	-2	-1	-1
0	-5	-4	-3	-2	-1	0

3. Construya la tabla o matriz para la operación mínimo definida en el conjunto A = {x/x $\in$ N pares, 10 $\geq$ x $\geq$ 2}

A = {2,4,6,8,10}

$\wedge$	2	4	6	8	10
2	2	2	2	2	2
4	2	4	4	4	4
6	2	4	6	6	6
8	2	4	6	8	8
10	2	4	6	8	10

4. Elabore la tabla o matriz para la operación mínimo definida en el conjunto de los múltiplos de 3 menores que 21.

$\wedge$	3	6	9	12	15	18
3	3	3	3	3	3	3
6	3	6	6	6	6	6
9	3	6	9	9	9	9
12	3	6	9	12	12	12
15	3	6	9	12	15	15
18	3	6	9	12	15	18

5. Genere la tabla o matriz para la operación mínimo, definida en el conjunto P = {-1,0,1}

$\wedge$	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	0	0
1	-1	0	1

13.2. MINIMO COMUN MULTIPLO Y MAXIMO COMUN DIVISOR

En el conjunto de los números naturales también se puede realizar operaciones de mucha importancia en el desarrollo de los contenidos de la matemática, siendo estos: Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor.

13.2.1. MINIMO COMUN MULTIPLO

Para determinar el mínimo común múltiplo de los números naturales se procede de la siguiente manera:

1.- Así por ejemplo, el mínimo común múltiplo entre 12 y 18 es:

$12 = 3 \times 2^2 \times 1$

$18 = 3^2 \times 2 \times 1$

2.- Tomando los factores primos comúnes y no comúnes con su mayor exponente, a saber:

$3^2 \ . \ 2^2 \ . \ 1^1$

3.- Multiplicamos estos factores y obtenemos el mínimo común múltiplo de 12 y 18.

9 . 4 . 1 = 36

Recordemos que el mínimo común múltiplo es el menor múltiplo común de los números dados y se lo representa por el símbolo $\underline{V}$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Construya una tabla para la operación mínimo común múltiplo definida en el conjunto.

A = {8,4,2}

$\underline{V}$	8	4	2
8	8	8	8
4	8	4	4
2	8	4	2

2. Elabore una tabla para la operación mínimo común múltiplo definida en el conjunto.

B = {1,2,3,4,5}

$\underline{V}$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	6	4	10
3	3	6	3	12	15
4	4	4	12	4	20
5	5	10	15	20	25

3. Haga una tabla para la operación mínimo común múltiplo definida en el conjunto.

A = {10,15,35}

$\underline{V}$	10	15	35
10	10	30	70
15	30	15	105
35	70	105	35

4. Construya una tabla para la operación mínimo común múltiplo definida en el conjunto.

P = {7,8,9,11}

V	7	8	9	11
7	7	56	63	77
8	56	8	72	88
9	63	72	9	99
11	77	88	99	11

13.2.2. MAXIMO COMUN DIVISOR

Para hallar el máximo común divisor de dos números naturales se procede de la siguiente manera:

1.- Así por ejemplo, el máximo común divisor entre 20 y 10 es:

$20 = 5 \times 2^2 \times 1$
$10 = 5 \times 2 \times 1$

2.- Tomamos los factores primos comúnes a ambos con su menor exponente:

$5 \times 2 \times 1$

3.- Multiplicamos estos factores y obtenemos el máximo común divisor de 20 y 10.

$5 \times 2 \times 1 = 10$

4.- El máximo común divisor es el mayor de los divisores que está contenido en los números dados y se lo representa por el símbolo: $\wedge$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Construya una tabla para la operación máximo común divisor definida en el conjunto A = {8,4,2}

$\wedge$	8	4	2
8	8	4	2
4	4	4	2
2	2	2	2

2. Elabore una tabla para la operación máximo común divisor definida en el conjunto B = {1,2,3,4,5}

$\wedge$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	1

3. Elabore una tabla para la operación máximo común divisor definida en el conjunto A = { 10,15,35}

$\wedge$	10	15	35
10	10	5	5
15	5	15	5
35	5	5	35

4. Construya una tabla para la operación máximo común divisor definida en el conjunto P = {7,8,9,11}

$\wedge$	7	8	9	11
7	7	1	1	1
8	1	8	1	1
9	1	1	9	1
11	1	1	1	11

13.3. POTENCIA

La potencia se define así:

$$\boxed{x \text{ pot } n = x^n}$$

$$x^n = x.x.x.......n \text{ veces; } n > 1$$

Ejemplo: 5 pot 3 = 5^3 = 125

En esta operación el orden de los operandos es importante.

Ejemplo: 4 pot 3 = 4^3 = 64 no es lo mismo que 3 potencia 4 = 3^4=81

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Construya una tabla para la operación potencia definida en el conjunto A = {1,2,3}

Pot	1	2	3
1	1	1	1
2	2	4	8
3	3	9	27

2. Elabore una tabla para la operación potencia, definida en el conjunto B = {0,1,3}

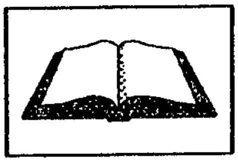
Pot	0	1	3
0	0	0	0
1	1	1	1
3	1	3	27

3. Elabore una matriz para la operación potencia, definida en el conjunto P = {0,1,2,3,4}

Pot	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16
3	1	3	9	27	81
4	1	4	16	64	25

4. Construya una tabla para la operación potencia, definida en el conjunto A = {a,b,c,d}

Pot	a	b	c	d
a	m	o	p	q
b	u	m	x	y
c	z	v	m	c
d	s	w	n	m



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 13

<u>Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos</u>:

1. Elabore una tabla para cada una de las siguientes operaciones: mínimo, máximo, mínimo común múltiplo y máximo común divisor con los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

   A = {3,4,5,6,7}

   B = {0,2,4,6}

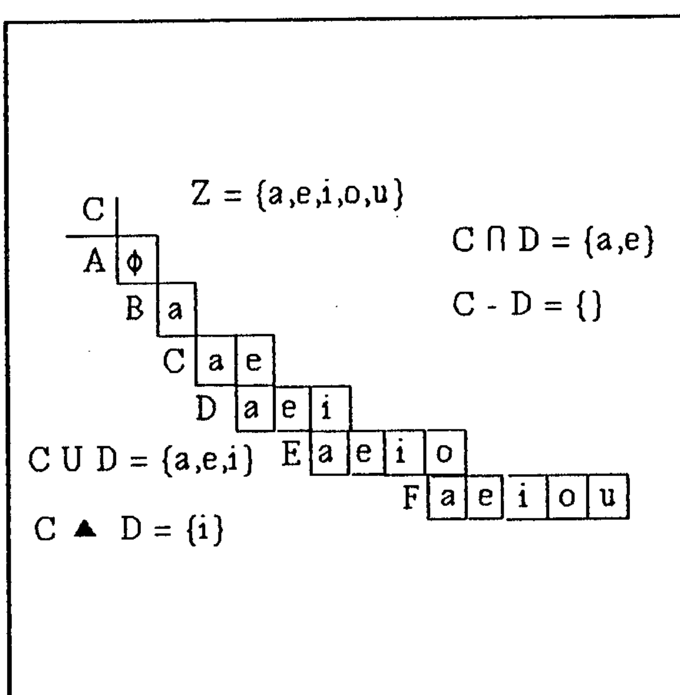
   C = {1,4,7,9}

2. Construya una matriz para la operación potencia, con los elementos de los siguientes conjuntos.

   A = {0,2,4}

   B = {0,1,3,5}

UNIDAD 14: OPERACIONES CON CONJUNTOS	14.1. Unión 14.2. Intersección 14.3. Diferencia Normal 14.4. Diferencia Simétrica



OBJETIVO 14	Construir tablas para la unión, intersección, diferencia normal y diferencia simétrica de conjuntos.

14. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Recordemos que un conjunto es cualquier colección de objetos, los mismos que se denominan elementos. Un conjunto se define fijando una regla, la cual nos permite identificar a los elementos del conjunto dado o bien enumerándolos.

El símbolo que se utiliza para un conjunto es { } (llaves) en su interior se escriben los elementos del conjunto o la regla que los identifica.

A continuación proponemos el conjunto definido por la regla "letras del abecedario castellano que no necesitan de la ayuda de otras para ser pronunciadas", es decir:

{letras del abecedario castellano que no necesitan de la ayuda de otras para ser pronunciadas}

Este conjunto puede ser representado mediante la enumeración de sus elementos, así:

{a,e,i,o,u}

Si del conjunto dado eliminamos uno, algunos, todos o ninguno de sus elementos, obtendremos otros conjuntos que se denominan subconjuntos del conjunto propuesto.

Si eliminamos todos sus elementos obtendremos un conjunto que no tiene elementos y se lo denomina vacío, que lo simbolizamos por el signo: ϕ, { }

Así anotamos algunos de los subconjuntos del conjunto propuesto:

ϕ, {a}, {e}, {i}, {o}, {u}

{a,e}, {a,i}, {a,o}, {e,i}

{a,e,i}, {a,e,o}, {a,e,u}

{a,e,i,o}, {a,e,i,o,u}

Para facilitar la nominación de cada uno de los subconjuntos les asignamos una letra mayúscula.

Ejemplo:

A = ϕ

B = {a}

C = {a,e}

D = {a,e,i}

E = {a,e,i,o}

F = {a,e,i,o,u}

Las operaciones ha realizar entre conjuntos son: Unión, Intersección, diferencia normal y diferencia simétrica.

14.1. UNION

La unión de dos conjuntos A y B es otro conjunto formado por todos los elementos de A y B. La representamos por el símbolo "U" (AUB)

Simbólicamente la representamos así:
$AUB = \{x/x \in A \ \forall \ x \in B\}$ Así por ejemplo:

Si A = {a,b}

B = {a,b,c} entonces

AUB = {a,b,c}

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea Z = {A,B,C} y A = { }, B = {1,2}, C = {1,2,3}. Construya una tabla para la operación unión.

U	A	B	C
A	A	B	C
B	B	B	C
C	C	C	C

2. Si Z = {1,2} y los subconjuntos: ϕ, {1}, {2}, {1,2}. Forme la tabla para la operación unión.

U	ϕ	{1}	{2}	{1,2}
ϕ	ϕ	{1}	{2}	{1,2}
{1}	{1}	{1}	{1,2}	{1,2}
{2}	{2}	{1,2}	{2}	{1}
{1,2}	{1,2}	{1,2}	{1,2}	{1,2}

3. Sea I = {0,1,2,3} y los subconjuntos A = ϕ, B = {0,1} C = {0,2} , D = {0,2,3}, E = {0,1,2}. Forme:

(IUC), (DUE) y (BUC) luego elabore la tabla unión con todos los subconjuntos y resultados finales.

IUC = {0,1,2,3} U {0,2} = {0,1,2,3} = I

DUE = {0,2,3} U {0,1,2} = {0,1,2,3} = I

BUC = {0,1} U {0,2} = {0,1,2} = E

U	A	B	C	D	E	I
A	A	B	C	D	E	I
B	B	B	E	I	E	I
C	C	E	C	D	E	I
D	D	I	D	D	I	I
E	E	E	E	I	E	I
I	I	I	I	I	I	I

4. Si Z = {ϕ, {c}, {d}, {c,d}}. Construya la tabla para la operación unión.

U	ϕ	{c}	{d}	{c,d}
ϕ	ϕ	{c}	{d}	{c,d}
{c}	{c}	{c}	{c,d}	{c,d}
{d}	{d}	{c,d}	{d}	{c,d}
{c,d}	{c,d}	{c,d}	{c,d}	{c,d}

5. Sea Z = {a,e,i,o,u} y los subconjuntos:

A = ϕ B = {a,e,o}, C = {i,u}, D = {a,e}, E = {a,e,i,u}, F = {a}, G = {e}, H = {a,i,u}, I = {e,i,u}. Elabore la tabla (U) correspondiente.

U	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I
B	B	B	Z	B	Z	B	B	Z	Z
C	C	Z	C	E	E	H	I	H	I
D	D	B	E	D	E	D	D	Z	E
E	E	Z	E	E	E	E	E	E	E
F	F	B	H	D	E	F	D	H	E
G	G	B	I	D	E	D	G	E	I
H	H	Z	H	E	E	H	E	H	E
I	I	Z	I	E	E	E	I	E	I

14.2. INTERSECCION

La intersección de dos conjuntos A y B es otro conjunto formado por todos los elementos comúnes de A y B. La representamos por el símbolo "$\cap$", ($A \cap B$).

Cuando dos subconjuntos no tienen elementos en común es igual al conjunto vacío, { }.

Simbólicamente la representamos así:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo:

Si A = {1,4,5,6} B = {0,1,4,7}

$$A \cap B = \{1,4\}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea Z = {A,B,C} y A = {1} B = {1,2} y C = {1,2,3} construya una tabla para la operación intersección.

$\cap$	A	B	C
A	A	A	A
B	A	B	B
C	A	B	C

2. Si Z = {1,2} y los subconjuntos: ϕ, {1}, {2}, {1,2}. Forme la tabla para la operación intersección.

$\cap$	ϕ	{1}	{2}	{1,2}
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
{1}	ϕ	{1}	ϕ	{1}
{2}	ϕ	ϕ	{2}	{2}
{1,2}	ϕ	{1}	{2}	{1,2}

3. Sea I = {0,1,2,3} y los subconjuntos A = ϕ, B = {0,1} C = {0,2} , D = {0,2,3}, E = {0,1,2} y J = {0}. Realice:

(I∩C), (D∩E) y (B∩C) luego forme la tabla de todas las intersecciones posibles.

I∩C = {0,1,2,3} ∩ {0,2} = {0,2} = C

D∩E = {0,2,3} ∩ {0,1,2} = {0,2} = C

B∩C = {0,1} ∩ {0,2} = {0} = J

∩	A	B	C	D	E	I	J
A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	B	J	J	B	B	J
C	A	J	C	C	C	C	J
D	A	J	C	D	C	D	J
E	A	B	C	C	E	E	J
I	A	B	C	D	E	I	J
J	A	J	J	J	J	J	J

4. Si Z = {ϕ, {c}, {d}, {c,d}}. Construya la tabla para la operación intersección.

∩	ϕ	{c}	{d}	{c,d}
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
{c}	ϕ	{c}	ϕ	{c}
{d}	ϕ	ϕ	{d}	{d}
{c,d}	ϕ	{c}	{d}	{c,d}

5. Sea Z = {a,e,i,o,u} y los subconjuntos:

A = ϕ B = {a,e,o}, C = {i,u}, D = {a,e}, E = {a,e,i,u}, F = {a}, G = {e}, H = {a,i,u}, I = {e,i,u}. Construya la tabla correspondiente para la operación intersección.

∩	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	B	A	D	D	F	G	F	G
C	A	A	A	A	C	A	A	C	C
D	A	D	A	D	D	F	G	F	F
E	A	D	C	D	E	F	G	H	I
F	A	F	A	F	F	F	A	F	A
G	A	G	A	G	G	A	G	A	G
H	A	F	C	F	H	F	A	H	C
I	A	G	C	G	I	A	G	C	I

14.3. DIFERENCIA NORMAL

La diferencia entre dos conjuntos es otro conjunto que está formado por los elementos que pertenecen al primer conjunto (A) y no pertenecen al segundo conjunto (B) al mismo tiempo.

Representamos la diferencia entre dos conjuntos A y B, por "-", (A-B).

Simbólicamente la representamos así:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \quad B\}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Dado el conjunto Z = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} y los subconjuntos A={1,2,3,4} y B = {2,4,6,8}. Determine (A-B), (Z-A) y (Z-B). Luego forme su tabla correspondiente.

A-B = {1,2,3,4} - {2,4,6,8} = {1,3}

Z-A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} - {1,2,3,4} = {5,6,7,8,9}

Z-B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} - {2,4,6,8} = {1,3,5,7,9}

-	A	B	Z
A	ϕ	{1,3}	ϕ
B	{6,8}	ϕ	ϕ
Z	{5,6,7,8,9}	{1,3,5,7,9}	ϕ

2. Si Z = {1,2} y los subconjuntos: {{1}, {2}, {1,2}}. Forme la tabla para la operación diferencia.

-	{1}	{2}	{1,2}
{1}	ϕ	{1}	ϕ
{2}	{2}	ϕ	ϕ
{1,2}	ϕ	ϕ	ϕ

3. Sean los subconjuntos E = {2, π, 1/2}, F = {1/5, 3, π, 2} y G={1,2,3} del conjunto Z = {1/5, 1/2, 1, 2, π}. Construya la tabla para la operación diferencia.

-	E	F	G
E	ϕ	{1/2}	{π,1/2}
F	{1/5,3}	ϕ	{1/5,π}
G	{1,2}	{1/5,π}	ϕ

4. Sea Z = {1,2,3,4} y los subconjuntos A = {1,2}, B = {2,3} y C={3,4}. Forme la tabla para la operación

diferencia.

-	A	B	C
A	ϕ	{1}	{1,2}
B	{3}	ϕ	{2}
C	{3,4}	{4}	ϕ

5. Dado P = {a,b,c} y los subconjuntos A = {a,c}, B = {a,d} C={a,b,c}, D = {a,b,d}. Construya la tabla para la operación diferencia.

-	A	B	C	D
A	ϕ	{c}	ϕ	{c}
B	{d}	ϕ	{d}	ϕ
C	{b}	{b,c}	ϕ	{c}
D	{b,d}	{b}	{d}	ϕ

14.4. DIFERENCIA SIMETRICA

Dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia simétrica entre A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos a la vez, en otras palabras la diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la unión y no a la intersección y se denota por "▲" (A▲B).

Simbólicamente se representa así:

$$A \blacktriangle B = \{x/x \in (A\cup B) \wedge x \quad (A\cap B)\}$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Dado Q = {a,e,i,o,u} y los subconjuntos A = {a,e,o}, B = {i,u}, C={a,i,o}, D = {e,o,u}. Construya la tabla para la operación diferencia simétrica.

▲	A	B	C	D
A	ϕ	Q	{e,i}	{a,u}
B	Q	ϕ	{a,o,u}	{e,i,o}
C	{e,i}	{a,o,u}	ϕ	{a,e,i,u}
D	{a,u}	{e,i,o}	{a,e,i,u}	ϕ

2. Dado el conjunto Z = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} y los subconjuntos A={1,2,3,4} y B = {2,4,6,8}. Determine A▲B, Z▲A y Z▲B. Luego forme su tabla correspondiente.

A▲B = {1,2,3,4} ▲ {2,4,6,8} = {1,3,6,8}

Z▲A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} ▲ {1,2,3,4} = {5,6,7,8,9}

Z▲B = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} ▲ {2,4,6,8} = {1,3,5,7,9}

▲	A	B	Z
φ	φ	{1,3,6,8}	{5,6,7,8,9}
{c}	{1,3,6,8}	φ	{1,3,5,7,9}
{d}	{5,6,7,8,9}	{1,3,5,7,9}	φ

3. Sea Z = {1,2,3,4,5,6,7,8} y los subconjuntos P={1,2,3,4} y Q={2,3,4,5}, R = {1,3,5,7}, S = {2,4,5,7,8}. Elabore la tabla para la operación diferencia simétrica.

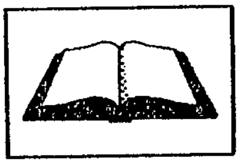
▲	P	Q	R	S
P	φ	{1,5}	{2,4,5,7}	{1,3,5,7,8}
Q	{1,5}	φ	{1,2,4,7}	{3,7,8}
R	{2,4,5,7}	{1,2,4,7}	φ	{1,2,3,4,8}
S	{1,3,5,7,8}	{1,3,5,7,9}	{1,2,3,4,8}	φ

4. Si Z = {1,2} y los subconjuntos: φ, {1}, {2}, {1,2}. Forme la tabla para la operación diferencia simétrica.

▲	φ	{1}	{2}	{1,2}
φ	φ	{1}	{2}	{1,2}
{1}	{1}	φ	{1,2}	{2}
{2}	{2}	{1,2}	φ	{1}
{1,2}	{1,2}	{2}	{1}	φ

5. Dado Z = {a,b,c} y los subconjuntos A = {a}, B = {b}, C = {c}, D={a,b}, E = {a,c}, F = {b,c}. Construya la tabla para la operación diferencia simétrica.

▲	A	B	C	D	E	F
A	φ	D	E	B	C	Z
B	D	φ	F	A	Z	C
C	E	F	φ	Z	A	B
D	B	A	Z	φ	C	E
E	C	Z	A	F	φ	D
F	Z	C	B	E	D	φ



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 14

Si desea verifique sus logros desarrollando los ejercicios que a continuación le proponemos:

1. Con los conjuntos y subconjuntos respectivos, forme la tabla para las operaciones siguientes:

   a. Unión

   b. Intersección

   c. Diferencia normal y

   d. Diferencia Simétrica

   A saber:

   1.1. Z = {2,4,6,8,10}, subconjuntos:
   A = {2,4},B = {2,6}, C={2,8}, D = {2,10}

   1.2. Z = {1,3,5,7,9}, subconjuntos:
   A = {1,3,5},B = {1,3,7}, C={1,3,9}, D = {3,5,7}

   1.3. Z = {u,x,y}, subconjuntos:
   A = {u},B ={x},C ={y},D={u,x},E ={u,y}, F ={x,y}

UNIDAD 15:	OPERACIONES BINARIAS PROPIEDADES	15.1. 15.2. 15.3. 15.4.	Conmutativa Asociativa Elemento Neutro Elemento Simétrico

*	a	b	c	**d**	e	f
a	b	c	d	**a**	f	a
b	c	d	e	**b**	a	b
c	d	e	f	**c**	b	c
d	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
e	f	a	b	**e**	d	e
f	a	b	c	**f**	e	f

d = e

e = elemento neutro

OBJETIVO 15	Comprobar el cumplimiento o no de las propiedades en las operaciones binarias.

15. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BINARIAS

Anteriormente usted ya estudió las propiedades de las operaciones en los diferentes conjuntos de números tales como: conmutativa, asociativa, clausurativa, elemento neutro y distributiva. En este capítulo demostraremos algunas de estas propiedades aplicadas a las operacione binarias, indicándole que algunas de ellas las observaremos en forma directa en la matriz.

15.1. PROPIEDAD CONMUTATIVA

¿Cómo sería la matriz de una operación binaria que posee la propiedad conmutativa?

Al observar la siguiente tabla:

?	0	1	2	3
0	3	1	2	0
1	1	0	0	1
2	2	0	1	3
3	0	1	3	2

diagonal principal

Y al trazar la diagonal principal (diagonal principal es la línea imaginaria que va del extremo superior izquierdo hasta el extremo inferior derecho). Vemos que a un lado y a otro de la diagonal existen elementos que guardan simetría; es decir, si doblamos el papel a lo largo de la diagonal las casillas que se superponen deben tener elementos iguales.

La forma más rápida de construir una tabla que posea la propiedad conmutativa es escribiendo cualquier elemento bajo la diagonal y luego llenar la parte que se encuentra sobre la diagonal por Simetría. En la diagonal principal se escriben los elementos a su conveniencia.

Hay operaciones binarias que al momento de construir la tabla ya podemos verificar el cumplimiento de la propiedad conmutativa por simple observación (por la ubicación de los elementos), no siendo necesario realizar la práctica de doblez del papel o de buscar su correlación.

Si usted recuerda las tablas que elaboró para las diferentes operaciones binarias se dará cuenta que ya ha venido manejado operaciones que cumplen la propiedad conmutativa como son: la adición, multiplicación, máximo, mínimo, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, unión, intersección y diferencia simétrica.

Así por ejemplo si consideramos el conjunto A = {a,b,c} y la operación binaria # (cruceta), definida en la siguiente tabla:

#	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	a
c	c	a	c

Observamos lo siguiente:

a # b = b y b # a = b

c # a = c y a # c = c

b # c = a y c # b = a

Por lo tanto indicar que para todo a # b elemento de A se cumple que a.b = b.a, entonces decimos que la operación # es conmutativa.

De este ejemplo podemos concluir:

QUE

Una operación cualquiera definida sobre un conjunto A es conmutativa si, para todo a,b ∈ A se cumple que a.b = b.a; es decir:

$$\forall\, a,b \in A: a.b = b.a$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Sea Z = {a,b,c} y los subconjuntos A = {a,b}, B = {a,c}, C = {b,c} D = {a}, E = {b}, F = {c} y la operación binaria intersección representada en la siguiente tabla. Verifique si posee la propiedad conmutativa.

∩	A	B	C
A	A	D	E
B	D	B	F
C	E	F	C

Desarrollo:

Se observa lo siguiente:

A ∩ C = E y C ∩ A = E

A ∩ B = D y B ∩ A = D

B ∩ C = F y C ∩ B = F

Por lo tanto podemos afirmar que la operación intersección cumple con la propiedad conmutativa.

2. La tabla que a continuación presentamos corresponde a una operación binaria definida en el conjunto A = {0,1,2,3,4}. Demuestre el cumplimiento de la propiedad conmutativa.

•	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Desarrollo:

Para que una operación sea conmutativa debe cumplir lo siguiente: $\forall\ a,b \in A,\ a.b = b.a$

$2.1 = 1.2$ $3.4 = 4.3$ $4.2. = 2.4$

$3 = 3$ $2 = 2$ $1 = 1$

Como usted puede ver el proceso de realizar todas las comprobaciones es extenso, para abreviar esto la forma más sencilla es trazar la diagonal y si observamos que los elementos están ubicados simétricamente, la operación posee la propiedad conmutativa.

•	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Por lo tanto esta operación es conmutativa.

3. propuestos los subconjuntos A = {3}, B = {5}, C = {7}, D = {3,5} E = {5,7}, F = {3,7} del conjunto Z = {3,5,7}. Pruebe que las operaciones binarias unión y diferencia simétrica representadas en las tablas adjuntas, cumplen la propiedad conmutativa.

U	A	B	C
A	A	D	F
B	D	B	E
C	F	E	C

▲	A	B	C
A	ϕ	D	F
B	D	ϕ	E
C	F	E	ϕ

A U B = D y B U A = D

A U C = F y C U A = F

B U C = E y C U B = E

∴ La U es conmutativa
Sol.

A ▲ B = D y B ▲ A = D

A ▲ C = F y C ▲ A = F

B ▲ C = E y C ▲ B = E

∴ La ▲ es conmutativa.

4. La tabla que se representa corresppone a la operación <u>máximo</u> definida en el conjunto A = {0,2,4,6}. Verifique su conmutatividad.

V	0	2	4	6
0	0	2	4	6
2	2	2	4	6
4	4	4	4	6
6	6	6	6	6

Desarrollo:

Para que una operación sea conmutativa debe cumplir lo siguiente: $\forall$ a,b $\in$ A, a.b = b.a

2 V 4 = 4 y 4 V 2 = 4

0 V 2 = 2 y 2 V 0 = 2

4 V 6 = 6 y 6 V 4 = 6

2 V 6 = 6 y 6 V 2 = 6

∴ la operación máximo es conmutativa. Sol.

5. La tabla que a continuación proponemos corresponde a una operación binaria. Examine si es o no conmutativa.

•	do	re	mi	fa	sol	la	si
do	do	sol	re	si	si	sol	la
re	sol	si	do	la	do	la	mi
mi	re	do	mi	re	mi	mi	re
fa	si	la	re	do	fe	mi	fa
sol	si	do	mi	re	la	fa	sol
la	do	re	mi	sol	la	sol	do
si	la	mi	re	fa	sol	do	fa

Desarrollo:

Como ya se indicó anteriormente se puede comprobar que una tabla propuesta correspondiente a una operación posee la propiedad conmutativa al trazar la diagonal principal los elementos son simétricos.

Si analizamos los elementos que se encuentran bajo y sobre la diagonal vemos que en unos casos son simétricos y en otros no; por lo tanto la operación binaria representada en la tabla no posee la propiedad conmutativa, contraejemplo: **la.sol = la y sol.la = fa** por lo tanto **la ≠ fa.** Sol.

15.2. PROPIEDAD ASOCIATIVA

Tenga presenta que al sumar tres números como: 2,4,6 el proceso que se utiliza es:

1.- Sumamos dos de ellos, estos se eligen como se desee puede ser el primero con el segundo; el segundo con el tercero; el primero con el tercero, etc. y este resultado con el que queda; es decir, que es indiferente los números que se suman primero, ésto es que pueden agruparse (asociarse) los números en una u otra forma y el resultado es el mismo, por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} (2 + 4) + 6 & = & 2 + (4 + 6) & = & (2 + 6) + 4\ldots\ldots \\ 6 + 6 & & 2 + 10 & & 8 + 4 \\ 12 & = & 12 & = & 12 \end{array}$$ L.Q.Q.D.

Analicemos lo que ocurre con la operación representada en la matriz siguiente:

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

(0 . 1) . 2 = (1 . 2) . 0 = (2 . 0) . 1 (2.1).2 = 2.(1.2)

0 . 2 2 . 0 0 . 1 2.2 = 2.(2)

0 0 0 4 = 4

(2 . 1) . 0 = (1 . 0) . 2 = (0 . 2) . 1

2 . 0 0 . 2 0 . 1

0 0 0

Al observar las diferentes alternativas de la operación propuesta vemos que el resultado no varía cumpliéndose de esta forma la propiedad asociativa.

De lo cual podemos concluir:

QUE

Una operación cualquiera definida sobre un conjunto A es asociativa si para toda a, b, c elemento de A se cumple: (a.b).c = a.(b.c) = ... es decir $\forall$ a,b,c $\in$ A : (a.b).c = a.(b.c)

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. La tabla que se presenta corresponde a una operación binaria definida en el conjunto Z = {0,1,2,3,4}. Verifique la propiedad asociativa.

.	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Desarrollo:

Una operación es asociativa si cumple:

$\forall\ a,b,c \in A \Rightarrow (a.b).c = a.(b.c)$

a) $(2.3).1 = 2.(3.1)$

$(0).1 = 2.(4)$

$1 = 1$

b) $(3.4).0 = 4.(3.0)$

$(2).0 = 4.(3)$

$2 = 2$

c) $(0.4).2 = 0.(4.2)$

$(4).2 = 0.(1)$

$1 = 1$

d) $(1.0).2 = 1.(0.2)$

$(1).2 = 1.(2)$

$3 = 3$

e) $(4.3).2 = 4.(3.2)$

$(2).2 = 4.(0)$

$4 = 4$

f) $(1.2).3 = 1.(2.3)$

$(3).3 = 1.(0)$

$1 = 1$ $\therefore$ La operación . es asociativa. Sol.

En el ejemplo propuesto hemos realizado la verificación de la asociatividad de algunas formas. Vale aclarar que en una operación dada mediante una tabla no podemos afirmar si posee o no la propiedad asociativa, por lo tanto es importante realizar todas las combinaciones posibles y poder afirmar que dicha operación cumple con la propiedad asociativa.

En el ejemplo propuesto la operación binaria (.) es asociativa.

2. Dada la operación binaria * representada en la siguiente tabla. Verifique si cumple con la propiedad asociativa.

.	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

Desarrollo:

Analicemos algunas posibilidades:

a) $(1*3)*4 = 1*(1*4)$

$(3)*4 = 1*(2)$

$2 = 2$

b) $(1*2)*3 = 1*(2*3)$

$(2)*3 = 1*(4)$

$4 = 4$

c) $(2*3)*4 = 2*(3*4)$

$(4)*4 = 2*(2)$

$3 = 3$

d) $(1*4).3 = 1*(4*3)$

$(4)*3 = 1*(2)$

$2 = 2$

e) $(4*3)*2 = 4*(3*2)$

$(2)*2 = 4*(4)$

$3 = 3$

$\therefore$ la operación posee la propiedad asociativa. Sol.

3. Considere la tabla que se presenta a continuación en la que se define la operación (V) y compruebe si posee la propiedad asociativa.

V	1	3	5	7	9
1 3 5 7 9	1 3 5 7 9	3 3 5 7 9	5 5 5 7 9	7 7 7 7 9	9 9 9 9 9

Desarrollo:

a) $(1 \vee 5) \vee 3 = 1 \vee (5 \vee 3)$

$(5) \vee 3 = 1 \vee (5)$

$5 = 5$

b) $(3 \vee 5) \vee 7 = 3 \vee (5 \vee 7)$

$(5) \vee 7 = 3 \vee (7)$

$7 = 7$

c) $(5 \vee 7) \vee 9 = 5 \vee (7 \vee 9)$

$(7) \vee 9 = 5 \vee (9)$

$9 = 9$

d) $(5 \vee 3) \vee 7 = 5 \vee (3 \vee 7)$

$(5) \vee 7 = 5 \vee (7)$

$7 = 7$

∴ la operación V es asociativa. Sol

4. La siguiente tabla corresponde a la unión de conjuntos. Verifique si es asociativa.

U	A	B	C	D	E
A B C D E	A B C D E	B C D E A	C D E A B	D E A B C	E A B C D

Desarrollo:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$B \cup C = A \cup D$$
$$D = D$$

b) $(B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D)$
$$D \cup D = B \cup A$$
$$B = B$$

c) $(C \cup D) \cup E = C \cup (D \cup E)$
$$A \cup E = C \cup C$$
$$E = E$$

d) $(A \cup C) \cup E = A \cup (C \cup E)$
$$C \cup E = A \cup B$$
$$B = B$$

e) $(B \cup D) \cup E = B \cup (D \cup E)$
$$E \cup E = B \cup C$$
$$D = D$$

$\therefore$ La operación U posee la propiedad asociativa. Sol

5. Verifique si la operación $\blacksquare$ es asociativa.

$\blacksquare$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	b
c	c	b	a	c
d	d	c	b	a

Desarrollo:

a) $(a \blacksquare b) \blacksquare c = a \blacksquare (b \blacksquare c)$
$$b \blacksquare c = a \blacksquare a$$
$$a = a$$

b) $(b \blacksquare c) \blacksquare d = b \blacksquare (c \blacksquare d)$
$$a \blacksquare d = b \blacksquare c$$
$$d \neq a$$

c) $(c \blacksquare d) \blacksquare a = c \blacksquare (d \blacksquare a)$

$$c \blacksquare a = c \blacksquare d$$

$$c = c$$

d) $(d \blacksquare a) \blacksquare c = d \blacksquare (a \blacksquare c)$

$$d \blacksquare c = d \blacksquare c$$

$$b = b$$

e) contraejemplo: $(c \blacksquare d) \blacksquare b = c \blacksquare (d \blacksquare b)$

$$c \blacksquare b = c \blacksquare c$$

$$b \neq a$$

$\therefore$ La operación ($\blacksquare$) no es asociativa.

> Nota:
>
> Algunos autores solamente enuncian la propiedad asociativa, sin detenerse a demostrarla, porque el proceso de verificación es muy extenso y dan por sentada la existencia de esta propiedad, esto cuando les interese el cumplimiento o no de otras propiedades y por ende la existencia de ciertas estructursa como: grupo, anillo y cuerpo...Lo cual usted lo estudiará en Estructuras Algebráicas.

15.3. ELEMENTO NEUTRO

Recordemos que en la multiplicación y en la adición de números hay un elemento que tiene una propiedad especial:

Si a un número cualquiera lo multiplicamos por 1 el resultado es el mismo número, siendo la unidad el elemento especial en esta operación.

$$5 \times 1 = 5$$

$$9 \times 1 = 9$$

$$2 \times 1 = 2$$

Generalizando: $m \times 1 = m$

Si a un número cualquiera le sumamos el cero el resultado es el mismo número, siendo cero el elemento especial en esta operación.

$$5 + 0 = 5$$

$$16 + 0 = 16$$

$$2 + 0 = 2$$

Generalizando: $m + 0 = m$

Una operación binaria definida en un conjunto A posee un elemento especial que se denomina neutro, identidad, idéntico o unidad y se lo representa por (e), tal que:

> $m.e = m$ elemento neutro por la derecha
> $e.m = m$ elemento neutro por la izquierda

POR LO TANTO

> Una operación binaria "." definida en el conjunto A tiene elemento neutro si existe un elemento $e \in A$, tal que:
> $m.e = m = e.m$; $m \in A$ (e es único)

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. La tabla adjunta corresponde a una operación binaria definida en el conjunto A = {3,5,7,9}. Pruebe que existe elemento neutro.

•	3	5	7	9
3	3	5	7	3
5	5	5	7	5
7	7	7	7	7
9	3	5	7	9

Elemento Neutro

DESARROLLO:

Para encontrar el elemento neutro en una tabla de doble entrada se procede de la siguiente manera:

Se busca una fila y una columna que estén formadas por los mismos elementos y en el mismo orden que la primera columna de la izquierda y la fila que encabeza la tabla. En la intersección de la fila con la columna se encuentra el elemento neutro. En la tabla que corresponde a una operación binaria, el elemento neutro es 9. Observamos que:

3 . 9 = 3	9 . 3 = 3
5 . 9 = 5	9 . 5 = 5
7 . 9 = 7	9 . 7 = 7
9 . 9 = 9	9 . 9 = 9

El elemento que se comporta como e es (9) y éste es el elemento neutro de la operación (.)

2. Con el conjunto Z = {0,2,4,6}. Construya la tabla para la operación mínimo común múltiplo y verifique la existencia del elemento neutro.

DESARROLLO:

$\overline{\wedge}$	1	2	4	6
1	1	2	4	6
2	2	2	4	6
4	4	4	4	12
6	6	6	12	6

e = 1

El elemento neutro existe y es el (1), observe que este elemento está en la intersección de la fila y de la columna que tiene los mismos elementos y en el mismo orden de la fila y la columna dados en la tabla.

Por lo tanto el mínimo común múltiplo tiene como elemento neutro el número 1.

3. Dado el conjunto P = {2,4,6,8,10} elaborar la tabla para la operación mínimo y comprobar si posee elemento neutro.

∧	2	4	6	8
2	2	2	2	2
4	2	4	4	4
6	2	4	6	6
8	2	4	6	8

→ e = 8

El elemento neutro que corresponde a la operación binaria mínimo representada en la tabla es el número 8. Lo que demostramos a continuación.

$$m . e = m = e . m$$

$2 \vee 8 = 2$ $\quad$ $8 \vee 2 = 2$

$4 \vee 8 = 4$ $\quad$ $8 \vee 4 = 4$

$6 \vee 8 = 6$ $\quad$ $8 \vee 6 = 6$

$8 \vee 8 = 8$ $\quad$ $8 \vee 8 = 8$

4. Determine el elemento neutro de la operación binaria máximo definida en el conjunto S = {7,8,9,10}

DESARROLLO:

∧	7	8	9	10
7	7	8	9	10
8	8	8	9	10
9	9	9	9	10
10	10	10	10	10

El elemento neutro que corresponde a la operación máximo representada en la tabla es el número 7. Lo cual lo verificamos a continuación.

$$m.e = m = e.m$$

$7 \wedge 7 = 7$ $\quad$ $7 \wedge 7 = 7$

$8 \wedge 7 = 8$ $\quad$ $7 \wedge 8 = 8$

$9 \wedge 7 = 9$ $\quad$ $7 \wedge 9 = 9$

$10 \wedge 7 = 10$ $\quad$ $7 \wedge 10 = 10$

5. La tabla adjunta pertenece a una operación binaria (unión) definida en el conjunto Z = {1,2} y los subconjuntos: ϕ, {1}, {2} y {1,2}. Probar que existe el elemento neutro.

U	ϕ	{1}	{2}	{1,2}
ϕ	ϕ	**{1}**	**{2}**	**{1,2}**
{1}	**{1}**	{1}	{1,2}	{1,2}
{2}	**{2}**	{1,2}	{2}	{1,2}
{1,2}	**{1,2}**	{1,2}	{1,2}	{1,2}

Verificamos:

$$m.e = m = e.m$$

$\phi \cup \phi = \phi$ $\quad$ $\phi \cup \phi = \phi$

$\{1\} \cup \phi = \{1\}$ $\quad$ $\phi \cup \{1\} = \{1\}$

$\{2\} \cup \phi = \{2\}$ $\quad$ $\phi \cup \{2\} = \{2\}$

$\{1,2\} \cup \phi = \{1,2\}$ $\quad$ $\phi \cup \{1,2\} = \{1,2\}$

El elemento neutro existe y es ϕ, note que este elemento está en la intersección de la fila y columna.

6. La siguiente tabla corresponde a una operación binaria (intersección) definida en el conjunto Z = {A,B,C} y A = {1} B={1,2} C = {1,2,3}. Comprobar que existe el elemento neutro.

DESARROLLO:

∩	A	B	C
A	A	A	A
B	A	B	B
C	A	B	C

El elemento C ∈ Z es el neutro que cumple lo siguiente:

$$m . e = m = e . m$$

$A \cap C = A$ $C \cap A = A$

$B \cap C = B$ $C \cap B = B$

$C \cap C = C$ $C \cap C = C$

7. Las siguientes tablas corresponden a las operaciones binarias: *, ▪. Compruebe si cumple o no con la propiedad m*e = m = e*m.

DESARROLLO:

*	1	3	5	7	9
1	3	3	5	1	7
3	5	5	7	3	9
5	5	7	9	5	3
7	7	9	1	7	3
9	9	1	3	9	5

$$m*e = m = e*m$$

$1 * 7 = 1$ $7 * 1 = 7,$ $1 \neq 7$

$3 * 7 = 3$ $7 * 3 = 9,$ $3 \neq 9$

$5 * 7 = 5$	$7 * 5 = 1,$	$5 \neq 1$
$7 * 7 = 7$	$7 * 7 = 7,$	$7 = 7$
$9 * 7 = 9$	$7 * 9 = 3,$	$9 \neq 3$

▪	1	3	5	7	9
1	5	7	9	1	3
3	7	9	1	3	5
5	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
7	9	1	3	5	7
9	9	9	1	3	5

$$m \blacksquare e = m = e \blacksquare m$$

$1 \blacksquare 5 = 9$	$5 \blacksquare 1 = 1,$	$9 \neq 1$
$3 \blacksquare 5 = 1$	$5 \blacksquare 3 = 3,$	$1 \neq 3$
$5 \blacksquare 5 = 5$	$5 \blacksquare 5 = 5,$	$5 = 5$
$7 \blacksquare 5 = 3$	$5 \blacksquare 7 = 7,$	$3 \neq 7$
$9 \blacksquare 5 = 1$	$5 \blacksquare 9 = 9,$	$1 \neq 9$

Del análisis que hemos realizado en las tablas observamos que cumplen la condición de la siguiente forma: En la primera se verifica por la derecha ----> ($m*e = m$) no verificándose por la izquierda; en la segunda ocurre lo contrario (se cumple $e \blacksquare m = m$). Esto nos permite concluir que hay operaciones binarias que tienen elemento neutro ya sea a la izquierda o a la derecha, esto se cumple en las operaciones que no poseen la propiedad conmutativa.

> Le dejamos las siguientes inquietudes como un trabajo opcional, para que dedique parte de su tiempo libre a investigar y verificar si las operaciones: diferencia, división, diferencia simétrica y el máximo común divisor tienen elemento neutro y si son operaciones binarias con conjuntos propuestos por usted.

15.4. ELEMENTO SIMETRICO

Siempre que hablamos de elemento neutro también mencionaremos el elemento simétrico ya que estas propiedades están relacionadas estrechamente:

Así el inverso aditivo de 5 es - 5 porque $5+(-5) = 0$, el inverso multiplicativo de 5 es 1/5 porque $5.1/5 = 1$. Es claro que para obtener el inverso de un número cualquiera (x) bajo la adición es necesario tener otro número (y) tal que $x + y = 0$; en forma análoga para encontar el inverso de un número (x) bajo la multiplicación se requiere de un número (y) tal que $x.y = 1$.

El elemento simétrico, en algunos casos, se llama opuesto, recíproco o inverso. Además para poder hablar de simétrico se requiere que en el conjunto dado conste el elemento simétrico para la operación.

EN CONSECUENCIA

Si A es un conjunto, " . " es una operación en A y existe e en A que es el elemento neutro para la operación " . ", un elemento a de A es el inverso del elemento b de A, se cumple:

$$a . b = b . a = e$$

EJERCICIOS ILUSTRATIVOS

1. Observe la tabla que a continuación le presentamos, donde se define la operación "#" y obtenga:

   a) Elemento neutro

   b) El simétrico de 1

   c) El simétrico de 2

   d) El simétrico de 3

#	1	2	3
1	2	1	1
2	1	2	3
3	3	3	3

DESARROLLO:

a) El elemento neutro es 2.

b) Como en la tabla hemos identificado el elemento neutro (2) entonces podemos determinar directamente el simétrico de cada uno de los elementos, de la siguiente forma:

En la fila del elemento que deseamos obtener el simétrico, se busca el elemento neutro, localizado éste se sigue su columna hasta interceptar con la fila que encabeza la tabla, en donde encontramos a su simétrico, así:

#	1	2	3
1	2	1	1
2	1	2	3
3	3	3	2

b) El simétrico de 1 es 1 => 1 # 1 = 2

b) El simétrico de 2 es 2 => 2 # 2 = 2

b) El simétrico de 3 es 3 => 3 # 3 = 2

2. La tabla que a continuación le presentamos corresponde a la operación binaria "::" Determine el simétrico de cada elemento (si existe).

::	1	2	3	4
1	1	2	1	3
2	2	3	2	4
3	1	2	3	4
4	3	4	4	2

DESARROLLO:

Para determinar el simétrico de cada elemento primeramente procedemos a determinar el elemento neutro, (e = 3). Luego determinamos el simétrico de cada elemento. Así:

$$a \cdot b = b \cdot a = e$$

$$1 :: 4 = 4 :: 1 = 3$$

$$2 :: 2 = 2 :: 2 = 3$$

$$3 :: 3 = 3 :: 3 = 3$$

$$4 :: 1 = 1 :: 4 = 3$$

Por lo tanto:

4 es el simétrico de 1

2 es el simétrico de 2

3 es el simétrico de 3

1 es el simétrico de 4.

3. Dado el conjunto A = {1,3,5,7,9} y la operación binaria \$ definida mediante la siguiente tabla:

Determine:

a) Elemento neutro

b) El simétrico de 3

c) El simétrico de 7

\$	1	3	5	7	9
1	1	3	5	7	9
3	3	3	3	5	7
5	5	3	5	3	9
7	7	5	3	7	1
9	9	7	9	1	9

DESARROLLO:

a) El elemento neutro es 1

b) Determinemos el simétrico de 3

Observando la tabla vemos que el número 3 no tiene elemento simétrico.

c) Determinemos el simétrico de 7.

$$7 \$ 9 = 9 \$ 7 = 1$$

$\therefore$ 9 es el simétrico de 7

4. Dado el conjunto B = {u,x,y,z} y la operación binaria • definida mediante la siguiente tabla. Halle:

a) El elemento neutro

b) El elemento simétrico de u,y,z.

$	u	x	y	z
u	u	z	u	u
x	z	x	y	x
y	u	y	y	y
z	u	x	y	z

DESARROLLO:

a) El elemento neutro es z

b) El simétrico de u: es x

El simétrico de y: no existe

El simétrico de z: es z

5. La tabla adjunta corresponde a una operación binaria definida en el conjunto C = {0,2,4,6,8}. Demuestre si es conmutativa, asociativa, posee elemento neutro y simétricos.

.	0	2	4	6	8
0	0	4	6	2	8
2	4	2	8	4	2
4	6	8	4	6	4
6	2	4	6	6	6
8	8	2	4	6	8

DESARROLLO:

Para que sea conmutativa debe cumplir la siguiente condición:
$\forall$ a,b $\in$ A ; a . b = b . a

0 . 4 = 4 . 0 2 . 6 = 6 . 2 4 . 2 = 2 . 4

6 = 6 4 = 4 8 = 8

$\therefore$ la operación es conmutativa. Sol.

Para que sea asociativa debe cumplir la siguiente condición:
$\forall$ a,b,c $\in$ A: (a . b) . c = a . (b . c)

(0.2).4 = 0.(2.4) (4.6).8 = 4.(6.8)

4.4 = 0.8 6.8 = 4.6

4 $\neq$ 8 6 = 6

(0.4).8 = 0.(4.8) (2.4).6 = 2.(6.4)

6.8 = 0.4 8.6 = 2.6

6 = 6 8 $\neq$ 4

$\therefore$ no posee la propiedad asociativa. Sol.

- El elemento neutro: no existe Sol.

- Al no existir elemento neutro, no hay elemento simétrico. Sol

6. Sea P = {a,e,i,o,u} y * la operación binaria indicada por la tabla adjunta. Verifique todas las propiedades posibles.

*	a	e	i	o	u
a	a	e	a	o	i
e	e	e	e	a	o
i	a	e	i	o	u
o	o	a	o	o	e
u	i	o	u	e	u

DESARROLLO:

a) <u>Propiedad Conmutativa</u>

a*e = e*a e*i = i*e i*o = o*i
e = e e = e o = o

$o*u = u*o \qquad u*a = a*u$

$e = e \qquad i = i$

∴ La operación * es conmutativa. Sol.

b) Propiedad Asociativa

$(a*e)*i = a*(e*i) \qquad (i*o)*u = i*(o*u)$

$e*i = a*e \qquad o*u = i*e$

$e = e \qquad e = e$

$(o*a)*u = o*(a*u) \qquad (e*i)*o = e*(i*o)$

$o*u = o*i \qquad e*o = e*o$

$e \neq o \qquad a = a$

∴ la operación no posee la propiedad asociativa. Sol.

c) Elemento neutro

El elemento neutro es i Sol.

d) Elemento simétrico

El simétrico de a es: u

El simétrico de e : no existe

El simétrico de i es: i

El simétrico de o : no existe

El simétrico de u es: a

7. Sea $I = \{0,1,2,3\}$ y los subconjuntos: $A = \phi$, $B = \{0,1\}$, $C = \{0,2\}$, $D = \{0,2,3\}$, $E = \{0,1,2\}$, definida mediante la siguiente tabla. Compruebe sus propiedades.

U	A	B	C	D	E	I
A	A	B	C	D	E	I
B	B	B	E	I	E	I
C	C	E	C	D	E	I
D	D	I	D	D	I	I
E	E	E	E	I	E	I
I	I	I	I	I	I	I

DESARROLLO:

a) Conmutativa

A U B = B U A $\qquad$ C U D = D U C

B = B

D U E = E U D

I = I

D = D

I U E = E U I

I = I

la operación U es conmutativa. Sol.

b) Asociativa

(A U B) U C = A U (B U C)

B U C = A U E

E = E

(D U E) U B = D U (E U B)

I U B = D U E

I = I

(C U D) U E = CU(DUE)

D U E = C U I

I = I

(C U E) U I = CU(EUI)

E U I = C U I

I = I

la operación U es asociativa. Sol.

c) Elemento neutro

El elemento neutro es A.

d) Elemento simétrico

El simétrico de A es: A

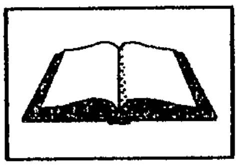
El simétrico de B : no hay

El simétrico de C : no hay

El simétrico de D : no hay

El simétrico de E : no hay

El simétrico de I : no hay Sol.



ACTIVIDAD DE REFUERZO No. 15

Para la fijación de sus conocimientos realice las actividades siguientes:

1. Sea Z = {a,b,c} y los subconjuntos: A = ϕ, B = {a}, C = {b}, D={c}, E = {a,b}, F = {a,c}, G = {b,c}. Construya la tabla para las operaciones unión e intersección y verifique las propiedades que cumplen dichas operaciones.

2. En la tabla adjunta con la operación "+". Determine el elemento neutro y verifique las propiedades conmutativa, asociativa y luego justifique sus respuestas.

+	0	-2	-4	-6	-8
0	0	-2	-4	-6	-8
-2	-2	-4	-6	-8	-10
-4	-4	-6	-8	-10	-12
-6	-6	-8	-10	-12	-14
-8	-8	-10	-12	-14	-16

3. La operación binaria "%" está definida en la siguiente tabla. Demuestre la existencia del elemento neutro y simétrico de 2,3 y 4.

%	1	2	3	4
1	1	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	3	2
4	2	4	3	4

4. Dado el conjunto P = {0,1,3,5} y la operación <u>máximo</u>. Construya la tabla y compruebe qué propiedades posee.

5. Con los elementos del conjunto A = {3,6,9,12,15}. Construya las matrices para las siguientes operaciones:

   a) Mínimo y verifique la propiedad conmutativa

   b) Máximo y verifique la propiedad asociativa

   c) Máximo común divisor y determine el elemento simétrico (si existe) de 3, 9 y 15.

RESUMEN

NOCIONES BASICAS

OPERACION: Es una correspondencia o relación entre un par ordenado de números que asocia otro número.

OPERACION BINARIA: Dado un conjunto A, no vacío consideramos el producto cartesiano AXB. Llamaremos operación en A, a toda aplicación de AXA en A.

MATRIZ: Una forma muy útil de representar una operación es mediante un cuadro o matriz denominada tabla de la operación pitagórica o tabla de doble entrada.

OPERACIONES EN NATURALES

Las operaciones que se pueden realizar en el conjunto de los naturales son: mínimo y máximo; mínimo común múltiplo y máximo común divisor y operación potencia.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión: La unión de dos conjuntos A y B es otro conjunto formado por todos los elementos de A y B $A \cup B = x/x \in A \vee x \in B$

Intersección: La intersección de dos conjuntos A y B es otro conjunto formado por todos los elementos que son comunes tanto en A como en B.

$$A \cap B = x/x \in A \wedge x \in B$$

Diferencia entre dos conjuntos: La diferencia entre dos conjuntos es otro conjunto que está formado por los elementos que pertenecen al primer conjunto A y no pertenecen al segundo conjunto B al mismo tiempo.

$$A - B = x/x \in A \wedge \in B$$

Diferencia Simétrica: Se llama diferencia simétrica entre A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B pero no a ambos a la vez.

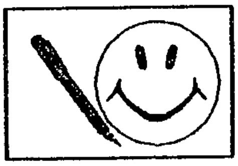
$$A \blacktriangle B = x/x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup B)$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES BINARIAS

Conmutativa : $\forall$ a,b $\in$ A: a.b = b.a
Asociativa : $\forall$ a,b,c $\in$ A: (a.b).c = a.(b.c)

Elemento Neutro : $m.e = m = e.m, \forall m \in A$

Elemento Simétrico: $a.b = b.a = e$



VALORE SUS CONOCIMIENTOS
No. 4

OBJETIVO 12	Determinar si un conjunto de números es completo o incompleto respecto de una operación.

A. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Escriba en el paréntesis correspondiente una (V) si el enunciado es verdadero o una (F) si es falso, para cada una de las siguientes proposiciones:

1. ( ) La adición en el conjunto de los naturales es una operación incompleta.

2. ( ) La tabla propuesta es completa siendo A = {a,b}

*	a	b
a	a	b
b	b	c

B. INSTRUCCIONES ESPECIFICAS:

Escriba una x en el paréntesis correspondiente a la respuesta correcta.

3. ¿Cuál de los conjuntos de números con la operación división expresa una operación completa?

   Naturales ( )
   Enteros ( )
   Racionales ( )

C. INSTRUCCIONES ESPECIFICAS:

Efectúe las operaciones mentalmente.

4. Complete la tabla de la operación diferencia con los elementos del conjunto B = {1,2,3}. Diga si se trata o no de una operación binaria.

-	1	2	3
1	0		-2
2			
3		1	0

D. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Frente a los conjuntos dados escriba la operación u operaciones que son completas con respecto a dicho conjunto.

5. N =

6. Z =

7. Q =

8. Z =

OBJETIVO 13	Elaborar tablas para las operaciones: máximo, mínimo, máximo común divisor, mínimo común múltiplo y potencia.

A. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Escriba en el paréntesis correspondiente una (V) si el enunciado es verdadero o una (F) si es falso, para cada una de las siguientes proposiciones:

9. ( ) 2 pot 3 = 6

10. ( ) El máximo entre 24 y 18 es 24

11. ( ) El máximo común divisor de 45 y 35 es 5

12. ( ) 5 pot 2 = 2 pot 5

13. ( ) El mínimo entre 15 y 15 es 1

B. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Complete las matrices para las operaciones que se indican a continuación, definidas en el conjunto A, siendo A = {2,7,8}.

14. Mínimo:

$\wedge$	2	7	8
2			2
7		7	
8	2		

15. Máximo:

$\underline{\vee}$	2	7	8
2	2		
7		7	
8			8

C. INSTRUCCION SPECIFICA

Con los elementos del conjunto B = {3,5,7}. Elabore una tabla para las operaciones:

16. Máximo

17. Mínimo común múltiplo

18. Potencia

OBJETIVO 14	Construir tablas para la: unión, intersección, diferencia normal y diferencia simétrica de conjuntos.

A. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Escriba una (x) en el paréntesis correspondiente a la respuesta correcta:

19. El símbolo para representar la operación diferencia es:

a. ( ) ▲

b. ( ) −

c. ( ) $\cup$

d. ( ) $\cap$

e. ( ) $\wedge$

20. La intersección entre los conjuntos A = {a,c,d} y B = {c,d} es:

a. ( ) ϕ

b. ( ) {c,d}

c. ( ) {a,c,d}

d. ( ) {a,d}

21. La diferencia simétrica entre los conjuntos: P = {r,s,t} y Q={u,r,s} es:

a. ( ) {r,s}

b. ( ) {u,r,s,t}

c. ( ) {t}

d. ( ) {t,u}

B. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Resuelva lo siguiente:

22. Complete la siguiente tabla que corresponde a la operación intersección.

∩	{2}	{2,4}	{4,5}	{2,4,5}
{2}		{2}		{2}
{2,4}	{2}		{4}	
{4,5}				
{2,4,5}		{2,4}		

C. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Construya una tabla para cada una de las siguientes operaciones:

23. Z = {0,1,2} y los subconjuntos A = {1,0}, B = {0,2}, C={1,2} en la operación unión.

24. La diferencia y los subconjuntos: A = {a}, B = {o}, C={a,e}, D = {e,o}.

OBJETIVO 15	Comprobar el cumplimiento o no de las propiedades en las operaciones binarias.

A. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Escriba una (x) en el paréntesis correspondiente a la respuesta correcta.

25. En la operación ⊙ el elemento neutro es:

⊙	1	2	3
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

a. ( ) 3

b. ( ) 2

c. ( ) ϕ

d. ( ) 1

26. En la siguiente matriz el elemento simétrico de 0 es:

*	0	2	3
0	3	0	2
2	0	2	3
3	2	3	3

a. ( ) 3

b. ( ) 0

c. ( ) ϕ

d. ( ) 2

27. La letra que verifica la propiedad conmutativa: e . f = f . e es:

.	e	f	g	h
e	e	g	h	f
f	g	f	f	g
g	h	e	g	h
h	e	f	g	h

a. ( ) c

b. ( ) f

c. ( ) g

d. ( ) ϕ

28. El valor que verifica la igualdad.

(5 . 6) .7 = 5 . (6 . 7) es:

.	4	5	6	7
4	4	4	5	6
5	6	6	7	4
6	7	4	5	4
7	7	7	7	6

a. ( ) ϕ

b. ( ) 4

c. ( ) 5

d. ( ) 6

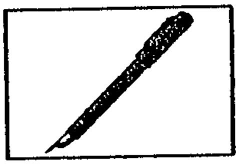
B. INSTRUCCION ESPECIFICA:

Con los elementos del conjunto A = {3,6,9} construya las matrices para las siguientes operaciones:

29. Mínimo y demuestre las propiedades conmutativa y asociativa.

30. Máximo común divisor y pruebe la existencia del elemento neutro.

31. Máximo común divisor y determine el elemento simétrico (si existe) para 3 y 9.



CLAVE DE RESPUESTAS

Objetivo 12

1. (F) La adición en los naturales es completa.

2. (F) Porque en la tabla hay elementos que no pertenecen al conjunto dado.

3. Naturales ( ) Enteros ( ) Racionales (x)

4.

−	1	2	3
1	0	-1	-2
2	1	0	-1
3	2	1	0

No es una operación binaria porque hay elementos que no pertenecen al conjunto dado.

5. N = Suma, multiplicación

6. Z = Suma, multiplicación y diferencia

7. Q = Suma, diferencia, multiplicación y división

8. Z = Suma

Objetivo 13

9. (F) Porque 2 pot 3 = 8

10. (V)

11. (V)

12. (F) Porque 5 pot 2 es igual a $5^2 = 25$ y 2 pot 5 es igual a $2^5=32$

13. (F) Porque el mínimo de 15 y 15 es 15

14.

∧	2	7	8
2	2	2	2
7	2	7	7
8	2	7	8

15.

$\underline{V}$	2	7	8
2	2	1	2
7	1	7	1
8	2	1	8

16.

V	3	5	7
3	3	5	7
5	5	5	7
7	7	7	7

17.

∧	3	5	7
3	3	15	21
5	15	25	35
7	21	35	49

18.

Pot	3	5	7
3	27	243	2187
5	125	3125	78125
7	343	16807	823543

Objetivo 14

19. b. (x)

20. b. (x)

21. d. (x)

22.

∩	{2}	{2,4}	{4,5}	{2,4,5}
{2}	φ	{2}	φ	{2}
{2,4}	{2}	{2,4}	{4}	{2,4}
{4,5}	φ	{4}	{4,5}	{4,5}
{2,4,5}	{2}	{2,4}	{4,5}	{2,4,5}

23.

U	A	B	C
A	A	Z	Z
B	Z	B	Z
C	Z	Z	C

24.

-	{a}	{o}	{a,e}	{e,o}
{a}	φ	{a}	φ	{a}
{o}	{o}	φ	{o}	φ
{a,e}	{e}	{a,e}	{o}	{a}
{e,o}	{e,o}	{e}	{o}	φ

Objetivo 15

25. a. ( ) b. ( ) c. (x) d. ( )

26. a. (x) b. ( ) c. ( ) d. ( )

27. a. ( ) b. ( ) c. (x) d. ( )

28. a. ( ) b. ( ) c. ( ) d. (x)

29.

∧	3	6	9
3	3	3	3
6	3	6	3
9	9	3	3

Propiedad conmutativa: se cumple
Propiedad asociativa : se cumple

30.

V	3	6	9
3	3	3	3
6	3	6	3
9	9	3	3

Elemento neutro no existe.

31. La expresión máximo común divisor no posee elemento neutro, como se observa en la tabla por lo tanto no se puede determinar el elemento simétrico de 3 y 9.

COMENTARIO

Al finalizar el estudio de los contenidos de las cuatro unidades que conforman el módulo IV, es necesario analizar los resultados tanto parciales como de módulo.

Después del estudio de cada unidad confiamos en que los objetivos planteados hayan alcanzado el punto de corte necesario para su aprobación, esto es el 70% en cada uno de ellos. Si por el contrario no alcanzó el porcentaje indicado debe usted reforzar sus conocimientos, procediendo a revisar nuevamente los temas correspondientes a los objetivos que no logró acreditar.

La autoevaluación propuesta al final de este módulo, comprende los aspectos más importantes y básicos que le permitan continuar con las asignaturas de los ciclos posteriores.

Si ha conseguido el nivel establecido, le felicitamos y le deseamos todo el éxito necesario en el estudio de las asignaturas de la especialidad y materias afines en el transcurso de los nuevos ciclos.

BIBLIOGRAFIA

1. BRITTON, Yack e Ignacio Bello, (1979): Matemática Contemporánea, México, Ed. Harla, 730 p.

2. HERNANDEZ, Francisco y otros (1982): Matemática para todos (Enciclopedia Universal de matemática, Volúmen I), España, Ed. Ortells, 152 p.

3. GALVEZ, Jorge (1990) Matemática, Loja U.T.P.L. 120 p.

4. PEREZ, Edgar y otros (1995) Enciclopedia Matemática, MEGA, Tomo I, Colombia, Ed. Terranova, 308 p.

5. PINZON, Alvaro Matemática Separadas para el curso preuniversitario.

6. SILVA, Juan y Adriano Loja, (1989) Matemática Tomo I, México, Ed. Limusa S.A., 242 p.

7. VARSAVSKY, Oscar (1973) Algebra para Escuelas Secundarias, Argentina, Ed. Universitario de Buenos Aires, 190 p.

8. VAZQUEZ, Carmen (1984) Conjuntos y Aplicaciones Toomo 15, Ed. Santillana, 112 p.

13. WILLS, Darío y otros:(1976) Matemática Moderna Estructurada. Vol. 3 y 5., Colombia., Edit. Norma., 252 p.